$$\mathcal{S} \xrightarrow[\text{spin}]{} \partial N \xleftarrow[\text{VB}]{} E$$

$$\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty} \mathcal{S} \xleftarrow[\text{sDir}]{D} \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty} \mathcal{S}$$

$$\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty}^{2} \mathcal{S} \xleftarrow{D = \overset{*}{D}} \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty}^{2} \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} \boxtimes E \to \partial N$$

$$\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty} \mathcal{S} \boxtimes E \xleftarrow[\text{vDir}]{D \boxtimes \iota_E} \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty} \mathcal{S} \boxtimes E$$

$$\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty}^{2} \mathcal{S} \boxtimes E \xleftarrow{D \boxtimes \iota_E = \overset{*}{D} \boxtimes \iota_E} \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty}^{2} \mathcal{S} \boxtimes E$$

$$\text{pos spec } \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\omega}^{2} \mathcal{S} \boxtimes E \xrightarrow[\text{o-proj}]{P_E} \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\infty}^{2} \mathcal{S} \boxtimes E \colon \quad \psi \text{ DO order } 0$$

$$\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{o} \mathbb{C} \ni f \mapsto P_E M_f P_E = T_E f \in \mathcal{L}\left(\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\omega}^{2} \mathcal{S} \boxtimes E\right)$$

$$\text{odd K-cycle } [D] = \partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{o} \mathbb{C} \ltimes \underbrace{\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{\omega}^{2} \mathcal{S} \boxtimes E} \in K_1 \underbrace{\partial N \diagdown\!\!\!\diagdown_{o} \mathbb{C}} = K^1(\partial N)$$