

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\text{spin}} \overset{+}{S}M \xleftarrow{\text{VB}} E$$

$$\overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft} \mathcal{S} \xleftarrow[\text{sDir}]{D} \overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft} \mathcal{S}$$

$$\overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \xleftarrow{D = \overset{*}{D}} \overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft}^2 \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} \mathbf{x} E \rightarrow \overset{+}{S}M$$

$$\overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft} \mathcal{S} \mathbf{x} E \xleftarrow[\text{vDir}]{D \mathbf{x} \iota_E} \overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft} \mathcal{S} \mathbf{x} E$$

$$\overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \mathbf{x} E \xleftarrow{D \mathbf{x} \iota_E = \overset{*}{D} \mathbf{x} \iota_E} \overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \mathbf{x} E$$

$$\text{pos spec} \quad \overset{+}{S}M \underset{\omega}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \mathbf{x} E \xrightarrow[\text{o-proj}]{P_E} \overset{+}{S}M \underset{\infty}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \mathbf{x} E: \quad \psi \text{ DO order } 0$$

$$\overset{+}{S}M \underset{\sigma}{\triangleleft} \mathbb{C} \ni f \mapsto P_E M_f P_E = T_E f \in \mathcal{L} \left(\overset{+}{S}M \underset{\omega}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \mathbf{x} E \right)$$

$$\text{odd K-cycle } [D] = \overset{+}{S}M \underset{\sigma}{\triangleleft} \mathbb{C} \ltimes \underbrace{\overset{+}{S}M \underset{\omega}{\triangleleft}^2 \mathcal{S} \mathbf{x} E}_{\in K_1 \underbrace{\overset{+}{S}M \underset{\sigma}{\triangleleft} \mathbb{C}}_{= K^1 \left(\overset{+}{S}M \right)}}$$