Mathematische Logik

Prof. Dr. Harald Upmeier

Ausgearbeitet von Florian Faber

Vorbemerkung: Die nachfolgende Vorlesungsausarbeitung ist als Begleittext zur Vorlesung, zur Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen, aufgrund der knappen Darstellung aber keinesfalls als Ersatz zur Vorlesung gedacht.
Vorschläge zur Verbesserung besonders der Lesbarkeit des Textes sind sehr willkommen: `upmeier@mathematik.uni-marburg.de`.

Inhaltsverzeichnis

Mengentheoretische Notation

Jede natürliche Zahl $n \geq 0$ wird mit der Menge

$$n = \{0, \dots, n-1\}$$

identifiziert. Insbesondere gilt $0 = \emptyset$ (leere Menge), $1 = \{0\}$ und $2 = \{0, 1\}$. Für Mengen X, Y ist X^Y die Menge aller Funktionen $Y \to X$. Insbesondere

$$\begin{aligned} 2^U &= \{ \text{ Funktionen } U \to 2\} = \mathfrak{P}(U) \text{ Potenzmenge },\\ U^n &= \{ \text{ Funktionen } n \to U\} \quad n\text{-Tupel in } U \end{aligned}$$

$U^1 = U,\ U^2 = U \times U$ und $U^0 = \{U\}$.

I Universelle Algebra

I.1 Relational-Algebren

Sei U eine nicht-leere Menge ('Universum'), $U^{n+1} = \{(u_0, \dots, u_n); u_i \in U\}$,
$\mathcal{R} = \dot{\bigcup}_{n \geq 0} \mathcal{R}_n$ (disjunkte Vereinigung), wobei

$$\forall\, n \geq 0: \ \mathcal{R}_n \ni R \subset U^{n+1} \quad \text{d.h. } \mathcal{R}_n \subset \mathfrak{P}(U^{n+1})$$

$n = |R|$ nennt man auch *Stelligkeit von* $R \in \mathcal{R}_n$. Für $n = 0$ ist jedes $R_0 \in \mathcal{R}_0$ eine Teilmenge von U. Wir setzen stets $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ voraus.

Definition. Das Tupel $(U, \mathcal{R})$ heißt *Relational-Algebra.*

Beispiel. Sei $U = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1$ mit
$\mathcal{R}_0 = \{R_0\}$ und
$\mathcal{R}_1 = \{R_1\}$,
wobei $R_0 := \{0\} \subset \mathbb{N}$ einzige 0-stellige Relation,
$R_1 := \{(n, n+1);\ n \in \mathbb{N}\} \ \subset\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Nachfolgerelation,
$\mathcal{R}_n = \emptyset \quad \forall\, n \geq 2$.

Definition. Sei $(U, \mathcal{R})$ Relational-Algebra.
Eine Teilmenge $V \subset U$ heißt *abgeschlossen* (oder *invariant*)
$:\Longleftrightarrow \forall\, R \in \mathcal{R}_n, n \geq 0$
$\forall\, (u_0, \dots, u_n) \in R$ gilt:
falls $\{u_0, \dots, u_{n-1}\} \subset V \Longrightarrow u_n \in V$.

Proposition. $V \subset U$ abg. $\Longrightarrow$ $V \supset \bigcup \mathcal{R}_0 = \bigcup_{R_0 \in \mathcal{R}_0} R_0$
(Vereinigung aller 0-stelligen 'Regeln').

Beweis. Sei $V \subset U$ abg., $R_0 \in \mathcal{R}_0$. Zu zeigen: $R_0 \subset V$.
Sei $u_0 \in R_0$. Wegen $\{u_0, \dots, u_{n-1}\} = \emptyset \subset V$ folgt mit obiger Definition $u_0 \in V$.
Da u_0 beliebig gewählt wurde $\Longrightarrow R_0 \subset V$.

□

Proposition. $V_\alpha \subset U$ abg. $\Longrightarrow \bigcap_\alpha V_\alpha \subset U$ abg.

Beweis. Sei $R \in \mathcal{R}_n$ und $(u_0, \dots, u_n) \in R$.
Angenommen, $\{u_0, \dots, u_{n-1}\} \subset V := \bigcap_\alpha V_\alpha$.
Zu zeigen: $u_n \in V$.
Sei α fest gewählt. Nach Annahme gilt: $\{u_0, \dots, u_{n-1}\} \subset V_\alpha$.
Da V_α nach Voraussetzung abgeschlossen $\Longrightarrow u_n \in V_\alpha$.
Da α beliebig gewählt $\Longrightarrow u_n \in \bigcap_\alpha V_\alpha = u_n \in V$.
Da $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ beliebig $\Longrightarrow V$ abgeschlossen.

□

Beispiel. $(\mathbb{N}, R_0, R_1)$ $\quad R_0 = \{0\} \subset \mathbb{N}, \quad R_1 = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Behauptung: $V \subset \mathbb{N}$ abg. $\implies$ $V = \mathbb{N}$

Beweis: Sei $V \subset \mathbb{N}$. Dann gilt:

1) $0 \in V$ wegen $R_0 \subset V$

2) $n \in V \implies n+1 \in V$ wegen Abgeschlossenheits-Definition angewandt auf R

Nach dem Induktionsaxiom gilt $V = \mathbb{N}$

Korollar. Sei $V \subset U$. Dann ist

$$\overline{V} := \bigcap \{W : W \subset U \text{ abg. }, V \subset W\}$$

die kleinste abg. Menge, die V enthält *(Hülle)*.

Spezialfall: $V = \bigcup \mathcal{R}_0 = \{u \in U : \exists\ R \in \mathcal{R}_0, u \in R\}$

$\implies \overline{\bigcup \mathcal{R}_0} \subset U$ kleinste abg. Teilmenge von U

Beispiel. $U = \mathbb{N}, R_0 = \{0\}, R_1 = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $\bigcup \mathcal{R}_0 = R_0 = \{0\}$ und $\overline{\{0\}} = \mathbb{N}$.

Definition. Seien $(U, \mathcal{R}), (\acute{U}, \acute{\mathcal{R}})$ Relational-Algebren.

$\varphi : U \to \acute{U}$ heißt *Homomorphismus* $(U, \mathcal{R}) \to (\acute{U}, \acute{\mathcal{R}})$

$:\Longleftrightarrow \forall\ R \in \mathcal{R}_n \quad \exists\ \acute{R} \in \acute{\mathcal{R}}_n$, so daß

$\varphi(R) := \{(\varphi u_0, \varphi u_1, \ldots, \varphi u_n); (u_0, \ldots, u_n) \in R\} \subset \acute{R}$

Lemma. Sei $\varphi : (U, \mathcal{R}) \to (\acute{U}, \acute{\mathcal{R}})$ hom. Dann gilt:

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \varphi\left(\bigcup \mathcal{R}_0\right) \subset \bigcup \acute{\mathcal{R}}_0 \\
(ii) & \acute{V} \subset \acute{U} \text{ abg.} \quad \implies \quad \varphi^{-1}\left(\acute{V}\right) \subset U \text{ abg.} \\
(iii) & V \subset U \quad \implies \quad \varphi\left(\overline{V}\right) \subset \overline{\varphi(V)} \\
(iv) & \varphi\left(\overline{\bigcup \mathcal{R}_0}\right) \subset \overline{\bigcup \acute{\mathcal{R}}_0}
\end{array}
$$

Der folgende abstrakte Begriff ist fundamental für die ganze Vorlesung.

Definition. $(u_0, \ldots, u_l) \in U^{l+1}$ heißt *Ableitung*

$:\Longleftrightarrow \forall\ 0 \leq m \leq l \quad \exists\ K \subset m = \{0, \ldots, m-1\}$

$\exists\ R \in \mathcal{R}_{|K|}, |K| = \#\text{Elemente in } K$,

so daß $(u_k : k \in K; u_m) \in R$.

Diese Definition besagt, daß jedes Glied u_m in einer Ableitung durch eine Regel R 'begründet' werden muß. Man beachte, daß K (als Teilmenge von m) geordnet ist, so daß auch $(u_k : k \in K)$ ein geordnetes Tupel ist.

Lemma. Sei $(u_0, \dots, u_l) \in U^{l+1}$ eine Ableitung.

Dann gilt: (i) $u_0 \in \bigcup \mathcal{R}_0$

(ii) $\forall\ 0 \le m \le l: \quad (u_0, \dots, u_m) \in U^{m+1}$ ist Ableitung

(„Verkürzung von Beweisen“)

(iii) $(u_0, \dots, u_l)$ Ableitung der Länge $l+1, 0 \le m \le l$

$\Longrightarrow (u_0, \dots, u_m, u_m, \dots, u_l)$ ist Ableitung der Länge $l+2$

(„Verlängerung von Beweisen“)

Beweis. Sei $(u_0, \dots, u_l)$ eine Ableitung in $(U, \mathcal{R})$.

(i) $m = 0$: Nach Def. $\exists\ K \subset 0 = \emptyset \quad \exists\ R \in \mathcal{R}_0$, so daß $(u_0) = u_0 \in R$, also $u_0 \in \bigcup \mathcal{R}_0$.

(ii) $0 \le m \le l$: Zu zeigen: $(u_0, \dots, u_m) \in U^{m+1}$ Ableitung

Sei $0 \le j \le m$.

Da $0 \le j \le l \quad \exists\ K \subset j \quad \exists\ R \in \mathcal{R}_{|K|}$

mit $(u_k : k \in K; u_j) \in R$

Wegen $j \subset m$ gilt $K \subset m \Longrightarrow$ Behauptung.

□

Definition.

$$
\begin{aligned}
U_l &:= \Big\{ u \in U : \quad \exists \text{ Ableitung } (u_0, \dots, u_l) \in U^{l+1}, \quad u_l = u \Big\}. \\
&= \text{Menge derjenigen } u \in U, \text{ die in } (l+1) \text{ Schritten ableitbar sind} \\
U_0 &= \bigcup \mathcal{R}_0 \\
U_\infty &:= \bigcup_{l \ge 1} U_l \;=\; \{ u \in U; u \text{ ableitbar } \}
\end{aligned}
$$

Beispiel. $U = \mathbb{N}, R_0, R_1$ wie oben.

Dann gilt: $U_l = \{0, \dots, l\} \subset U_{l+1}$

$U_\infty = \mathbb{N}$

Proposition. $\varphi : (U, R) \to (\acute{U}, \acute{\mathcal{R}})$ hom. Dann gilt:

(i) $(u_0, \dots, u_l) \in \overrightarrow{U^{l+1}}$ Ableitung $\Longrightarrow (\varphi u_0, \dots, \varphi u_l) \in \overrightarrow{\acute{U}^{l+1}}$ Ableitung

(ii) $\varphi(U_l) \subset \acute{U}_l$

(iii) $\varphi(U_\infty) \subset \acute{U}_\infty$.

Induktions-Satz.

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{\bigcup \mathcal{R}_0} & = & U_\infty \\
\text{(Hülle der nullstelligen Regeln} & = & \text{Menge der ableitbaren Elemente)}
\end{array}
$$

Beweis. „$\subset$“: Zu zeigen: U_∞ abgeschlossen

Sei $R \in \mathcal{R}_n$ beliebig, sei $(u_1, \ldots, u_n, u) \in R$ beliebig

Voraussetzung: $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U_\infty$, zu zeigen: $u \in U_\infty$

Da $u_1, \ldots, u_n$ ableitbar, gilt $\forall\ 1 \leq j \leq n \quad \exists$ Ableitung $u_j^0, u_j^1, \ldots, u_j^{l_j} = u_j$

Dann ist auch

$$\underbrace{u_1^0, \ldots, u_1^{l_1}}, \ldots, \underbrace{u_j^0, \ldots, u_j^{l_j}}, \ldots, \underbrace{u_n^0, \ldots, u_n^{l_n}}, u \quad \text{eine Ableitung}$$

Zunächst ist u durch $u_i = u_1^{l_1}, \ldots, u_n^{l_n}$ ‘begründet’, da $(u_1, \ldots, u_n, u) \in R$.

Sei nun $1 \leq j \leq n$ und $0 \leq m \leq l_j$:

Da $(u_j^0, \ldots, u_j^{l_j})$ Ableitung ist $\Longrightarrow \exists\ K \subset \{0, \ldots, m-1\}$ und

$\exists\ \acute{R} \in \mathcal{R}_{|K|}$, so daß

$(u_j^k : k \in K; u_j^m) \in \acute{R}$

$\Longrightarrow$ Jedes u_j^m ist durch eine Regel begründet

Also ist u ableitbar $\Longrightarrow u \in U_\infty$

Da R beliebig $\Longrightarrow U_\infty$ abgeschlossen $\Longrightarrow U_\infty \supset \overline{\bigcup \mathcal{R}_o}$

„$\supset$“: Zu zeigen: $U_\infty \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$. Es gilt

$U_\infty = \bigcup_{l \geq 0} U_l, \quad U_l = \left\{u \in U : \exists\ (u_0, \ldots, u_l) \in U^{l+1}, u_l = u\right\}$.

Wir wissen: $U_l \subset U_{l+1}$ aufgrund ‘Beweisverlängerung’.

Zeige durch Induktion $(l \geq 0)$: $\quad U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$

$l = 0$: $\quad U_0 = \{u \in U \mid u = u_0 \text{ Ableitung }\}$

$= \bigcup \mathcal{R}_0 \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$

$0 \leq l-1 \rightsquigarrow l$: $\quad$ Es gelte $U_{l-1} \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$

Zu zeigen: $U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$

Sei $u \in U_l \Longrightarrow \exists$ Ableitung $(u_0, \ldots, u_l), u_l = u$

$\Longrightarrow \exists\ K \subset \{0, \ldots, l-1\}, \exists\ R \in \mathcal{R}_{|K|}$ mit $(u_k : k \in K; u_l) \in R$

$\forall\ k \in K$ gilt: u_k ableitbar,

denn $(u_0, \ldots, u_k)$ Ableitung in $U^{k+1}, k < l$

$\Longrightarrow u_k \in U_{l-1} \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$ (nach Induktions-Voraussetzung)

Also: $\forall\ k \in K : u_k \in \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$

Da $\overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$ abgeschlossen, gilt $u = u_l \in \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$, d.h. $U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$.

Nach dem Induktions-Axiom gilt: Alle $U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0} \Longrightarrow U_\infty \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$.

(Zur formalen Anwendung des Induktions-Axioms sei

$$L := \left\{ l \in \mathbb{N} : \quad U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0} \right\}.$$

Dann gilt wegen $0 \in L$, d.h. $U_0 \subset \bigcup \mathcal{R}_0$, und

$$0 \leq l-1 \in L \quad \Longrightarrow \quad l \in L \text{ wegen } U_{l-1} \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0} \quad \Longrightarrow \quad U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}.$$

Nach dem Induktions-Axiom gilt: $L = \mathbb{N}$, d.h. $\forall\ l \in \mathbb{N}, U_l \subset \overline{\bigcup \mathcal{R}_0}$).

$\square$

Korollar. *(Strukturelle Induktion)* $V \subset U$ abg. $\quad\Longrightarrow\quad V \supset U_\infty$

Beispiel. $U = \mathbb{N}, R_0 = \{0\}, R_1 = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow U_\infty = \mathbb{N}$
Das Korollar ist also äquivalent zum Induktions-Axiom für $\mathbb{N}$.

I.2 Funktional-Algebren

Definition. Sei U eine nicht-leere Menge, $\mathcal{F} = \dot{\bigcup}_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$.
Das Paar $(U, \mathcal{F})$ heißt *Funktional-Algebra*, falls
jedes $f \in \mathcal{F}_n$ eine Funktion $f : U^n \to U$ ist, d.h.
$\forall\, u_1, \ldots, u_n \in U \quad \exists_1 f u_1 \cdots u_n \in U$.
Für $n = 0$ wird $f_0 \in \mathcal{F}_0$ mit dem Wert $f_0 \in U$ identifiziert, d.h. $\mathcal{F}_0 \subset U$.

Proposition. $(U, \mathcal{F})$ Funktional-Algebra $\Longrightarrow (U, \mathcal{G}_\mathcal{F})$ Relational-Algebra
durch für $f \in \mathcal{F}_n$: Graphen-Relation

$$\mathcal{G}_f = \{(u_1, \ldots, u_n, f u_1 \cdots u_n) : \ u_i \in U\} \quad \subset \quad U^{n+1}.$$

formal: $\mathcal{R}_n = \{\mathcal{G}_f : \quad f \in \mathcal{F}_n\}$.

Insbesondere sind die Begriffe ‘abgeschlossen’ und ‘Ableitung’ für Funktional-Algebren definiert. Es gilt:

$$\bigcup \mathcal{R}_0 = \bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{F}_0} = \mathcal{F}_0 \text{ und daher } U\infty = \overline{\mathcal{F}_0}.$$

Proposition. Sei $(U, \mathcal{F})$ eine Funktional-Algebra.
Dann gilt: $V \subset U$ ist $\mathcal{F}$-abgeschlossen (genauer: $\mathcal{G}_\mathcal{F}$-abgeschlossen)
$\Longleftrightarrow \forall\, u_1, \ldots, u_n \in V$
$\quad \forall\, f \in \mathcal{F}_n$ gilt:
$\quad f u_1 \cdots u_n \in V$
Insbesondere gilt $\mathcal{F}_0 \subset V$.

Beweis. Für $f \in \mathcal{F}_n$ ist die zugehörige Relation der Graph $\mathcal{G}_f = \{(u_1, \ldots, u_n, f u_1 \cdots u_n)\} \subset U^{n+1}$.
Also gilt: V abgeschlossen $\Longleftrightarrow \forall\, \mathcal{G}_f \quad \forall\, (u_1, \ldots, u_n, f u_1 \cdots u_n) \in \mathcal{G}_f$:
Falls $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V \quad\Longrightarrow\quad f u_1 \cdots u_n \in V$.

□

Korollar. Falls $V \subset U$ $\mathcal{F}$-abgeschlossen $\quad\Longrightarrow\quad (V, \mathcal{F}|_V)$ Funktional-Algebra,
wobei $\forall\, f \in \mathcal{F} \quad f|_V : V^n \to V$ Restriktion von f auf V^n.

Beispiel. $U = \mathbb{N}, \quad \mathcal{F}_0 \ni f_0 = 0, \quad \mathcal{F}_0 = \{0\}, \mathcal{F}_1 = \{f_1\}$ wobei
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_1 n = n + 1$
$\Longrightarrow \quad U_\infty = \mathbb{N} = \overline{\{0\}}$

Proposition. $(U, \mathcal{F}) \xrightarrow[\text{Hom.}]{h} (\acute{U}, \acute{\mathcal{F}}) \Longleftrightarrow (i)\ h : U \to \acute{U}$

$(ii)\ \forall\, f \in \mathcal{F}_n \quad \exists\, \acute{f} \in \acute{\mathcal{F}}_n$
$\quad \forall\, u_1, \ldots, u_n \in U$
$\quad \acute{f}(h u_1, \ldots, h u_n) = h(f u_1 \cdots u_n)$

Beweis. h Homomorphismus $\iff \forall\, \mathcal{G}_f \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}
&\exists\, \mathcal{G}_{\acute f} \in \acute{\mathcal{R}}_n, \text{ so daß } h\mathcal{G}_f \subset \mathcal{G}_{\acute f},\\
&\text{d.h. } \forall\, u_1, \dots, u_n \in U \text{ mit } (u_1, \dots, u_n, fu_1 \cdots u_n) \in \mathcal{G}_f\\
&\text{gilt } h(u_1, \dots, u_n, fu_1 \cdots u_n) = (hu_1, \dots, hu_n, h\,(fu_1 \cdots u_n)) \in \mathcal{G}_{\acute f}.\\
&\text{Wegen } \mathcal{G}_{\acute f} = \left\{(v_1, \dots, v_n, \acute f v_1 \cdots v_n) :\ v_i \in \acute U\right\}\\
&\text{folgt } hfu_1 \cdots u_n = \acute f(hu_1, \dots, hu_n).
\end{aligned}$$

□

Sei $(U, \mathcal{F})$ eine Funktionalalgebra.

$\sim$ Äquivalenz-Relation auf U:

$$\begin{array}{ll}
u \sim u & \text{(reflexiv)}\\
u \sim v \iff v \sim u & \text{(symmetrisch)}\\
u \sim v \sim w \implies u \sim w & \text{(transitiv)}
\end{array}$$

Definition. $\sim$ *Kongruenz-Relation* $:\iff \forall\, f \in \mathcal{F}_n \quad \forall\, u_1 \sim v_1, \dots, u_n \sim v_n :$

$$fu_1 \cdots u_n \sim fv_1 \cdots v_n$$

Proposition. Sei $(U, \mathcal{F}) \xrightarrow[\text{Hom.}]{h} (\acute U, \acute{\mathcal{F}})$.

Dann ist $u \sim v :\iff hu = hv$ eine Kongruenz-Relation.

Beweis. $u_i \sim v_i, f \in \mathcal{F}_n \implies hu_i = hv_i$ und $\exists\, \acute f \in \acute{\mathcal{F}}_n, h\mathcal{G}_f \subset \mathcal{G}_{\acute f}$

$$\begin{aligned}
&\implies h\,(fu_1 \cdots u_n) = \acute f\,(hu_1, \dots, hu_n) = \acute f\,(hv_1, \dots, hv_n) = h\,(fv_1 \cdots v_n)\\
&\implies fu_1 \cdots u_n \sim fv_1 \cdots v_n.
\end{aligned}$$

□

Sei $\sim$ Kongruenz-Relation auf U, $\dot U := U/\!\sim$ Menge der Restklassen
$\pi : U \to \dot U$ kanonische Projektion, also $\pi(u) =$ Restklasse von u.

$\forall\, f \in \mathcal{F}_n \quad \exists\, \dot f : \dot U^n \to \dot U \quad$ mit

$$\begin{tikzcd}
U^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & U \arrow[d, "\pi"]\\
\dot U^n \arrow[r, "\dot f"] & \dot U
\end{tikzcd}$$

kommutativ, also ist

$$\dot f\,(\pi u_1, \dots, \pi u_n) := \pi f\,(u_1, \dots, u_n) \ \text{ wohldefiniert.}$$

$\dot{\mathcal{F}}_n := \left\{\dot f : f \in \mathcal{F}_n\right\} \implies (\dot U, \dot{\mathcal{F}})$ Funktional-Algebra, genannt *Quotienten-Algebra von* $(U, \mathcal{F})$ *bezüglich* $\sim$.
Es gilt $(U, \mathcal{F}) \xrightarrow[\text{Hom.}]{\pi} (\acute U, \acute{\mathcal{F}})$ und $u \sim v \iff \pi u = \pi v$.

I.3 Peano-Algebren

Definition. Sei $(U, \mathcal{F})$ Funktional-Algebra mit Funktionen $\mathcal{F}_n \ni f : U^n \to U$.

$(U, \mathcal{F})$ heißt *Peano-Algebra* $:\Longleftrightarrow$

(i) Jedes $u \in U$ hat eine eindeutige Darstellung
$u = ft_1 \cdots t_n$ mit $f \in \mathcal{F}_n$ eindeutig und $t_1 \cdots t_n \in U$ eindeutig

(ii) U ist minimal, d.h. $U = U_\infty$, d.h. jedes $u \in U$ ableitbar

Proposition. $U = \mathbb{N}$ ist Peano-Algebra bezüglich $f_0 = 0 \in U$ und $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_1 n = n + 1$.

Beweis. (i) $u = 0 \implies u = f_0, \quad u > 0 \implies f_1(n-1) \implies$ Eindeutigkeit

(ii) Nach dem Induktionsaxium gilt $U = U_\infty \implies U$ minimal

$\square$

Bemerkung. Sei $(U, \mathcal{F})$ minimal, $U = U_\infty$. Dann ist $(U, \mathcal{F})$ eine Peano-Algebra $\Longleftrightarrow$

(i) Jedes $f \in \mathcal{F}_n$ ist injektiv $f : U^n \to U$

(ii) Die Bildbereiche $f(U^n) = \operatorname{Ran}(f) = \{fu_1 \cdots u_n : \ (u_1, \ldots, u_n) \in U^n\}$
sind paarweise disjunkte Partitionen von U_i: $U = \dot{\bigcup}_f f(U^n)$

Rekursions-Satz. Sei $(T, \mathcal{F})$ Peano-Algebra, sei Y eine Menge
Für jedes $f \in \mathcal{F}_n$ sei $h_f : (T \times Y)^n \to Y$ gegeben. $\exists_1\ h : T \to Y$
$\forall\ f \in \mathcal{F}_n : \quad \forall\ t_1, \ldots, t_n \in T : \quad h\left(ft_1 \cdots t_n\right) = h_f\left(\left(t_1, ht_1\right), \ldots, \left(t_n, ht_n\right)\right)$

Beweis. $U := T \times Y$. Für $f \in \mathcal{F}_n$ sei $\tilde{f} : (T \times Y)^n \to T \times Y$ definiert durch

$$\tilde{f}\Big(\left(t_1, y_1\right), \ldots, \left(t_n, y_n\right)\Big) := \Big(ft_1 \cdots t_n, h_f\big(\left(t_1, y_1\right), \ldots, \left(t_n, y_n\right)\big)\Big).$$

$f_0 \in \mathcal{F}_0$, sei $\tilde{f}_0 := (f_0, h_{f_0}) \in T \times Y$.
Dann ist $U_\infty = (T \times Y)_\infty = \overline{\tilde{\mathcal{F}}_0}$ abgeschlossen in U. Setze $\tilde{\mathcal{F}} := \left\{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}\right\}$
Wir zeigen: $V := \{t \in T : \ \exists_1\ ht \in Y,\ (t, ht) \in U_\infty\} \subset T$ ist abgeschlossen
Sei $f \in \mathcal{F}_n, \{t_1, \ldots, t_n\} \subset V$
Behauptung: $ft_1 \cdots t_n \in V$ und $hft_1 \cdots h_n = h_f\big((t_1, ht_1), \ldots, (t_n, ht_n)\big)$
Beweis: $(t_1, ht_1) \in U_\infty, \ldots, (t_n, ht_n) \in U_\infty$ und U_∞ ist $\tilde{\mathcal{F}}$-abgeschlossen
$\implies \Big(ft_1, \ldots, t_n, h_f\big((t_1, ht_1), \ldots, (t_n, ht_n)\big)\Big) = \tilde{f}\big((t_1, ht_1), \ldots, (t_n, ht_n)\big) \in U_\infty$
$\implies$ Existenz von $hft_1 \cdots t_n$
Eindeutigkeit: Sei $(ft_1 \cdots t_n, y) \in U_\infty \quad \implies \quad \exists$ Ableitung (in $T \times Y$)
$((s_1, y_1), \ldots, (s_m, y_m), (ft_1 \cdots t_n, y)) \in (T \times Y)^{m+1}$
$\implies \exists\ g \in \mathcal{F}_l : ((s_{i_1}, y_{i_1}), \ldots, (s_{i_l}, y_{i_l}), (ft_1 \cdots t_n, y)) \in \mathcal{G}_{\tilde{g}}$
$\implies T \ni ft_1 \cdots t_n = gs_{i_1} \cdots s_{i_l}, \quad y = h_g(s_{i_1}, y_{i_1}), \ldots, (s_{i_l}, y_{i_l})).$

Da T Peano-Algebra $\Longrightarrow f = g_1, \quad n = l, \quad t_1 = s_{i_1}, \dots, t_n = s_{i_l};$
$\forall\, 1 \le k \le l = n:$
$(t_k, y_{i_k}) = (s_{i_k}, y_{i_k}) \in U_\infty, \quad t_k \in V$
Wegen der Eindeutigkeit $\Longrightarrow y_{i_k} = ht_k$
$\Longrightarrow y = h_f\big((t_1, ht_1), \dots, (t_n, ht_n)\big)$
$\Longrightarrow$ Eindeutigkeit von $hft_1 \cdots t_n$.

Aus der Behauptung folgt daher: $V \subset T$ abg.
Da T minimal $\Longrightarrow V = T \quad \Longrightarrow \quad h : T \to Y$ ist wohldefinierte Abbildung und Rekursionsformel gilt.

□

I.4 Wort-Algebren und Term-Algebren

Seien $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset, \quad \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n, \dots$ paarweise disjunkte Mengen; Elemente in $\mathcal{S}_n$ heißen *Symbole* mit Stelligkeit n.
$\mathcal{S} := \dot{\bigcup}_{n \ge 0} \mathcal{S}_n$
$\mathcal{S}^l$ = Menge der l-Tupel mit Werten in $\mathcal{S}$

Definition. $W := \dot{\bigcup}_{l \ge 1} \mathcal{S}^l$ = Menge aller Tupel in $\mathcal{S}$ der Länge ≥ 1.
Elemente in W heißen *Worte* $w = w^1 w^2 \cdots w^l$, wobei $w^i \in \mathcal{S}_{n_i}$,
das leere Wort ist nicht enthalten!
$l = l(w) \ge 1$ heißt *Länge* von w.

Beispiel. Wort $w = s_0 t_1 s_1 t_0 s_2 t_2$, wobei $s_0, t_0 \in \mathcal{S}_0,\ s_1, t_1 \in \mathcal{S}_1,\ s_2, t_2 \in \mathcal{S}_2$

Definiere W als Funktional-Algebra mit Funktionen-Menge $\mathcal{S}$, d.h. $(W, \mathcal{S})$, wie folgt:
Für $s \in \mathcal{S}_n$ definiere Funktion $s : W^n \to W$ durch Funktionswert

$$sw_1 \cdots w_n \ := \ sw_1^1 \cdots w_1^{l_1} \cdots w_n^1 \cdots w_n^{l_n}, \text{ wobei } w_1 = w_1^1 \cdots w_1^{l_1} \in \mathcal{S}^{l_1}$$

mit $w_1^i \in \mathcal{S}_{n_1^i}, \quad w_2 = w_2^1 \cdots w_2^{l_2} \in \mathcal{S}^{l_2}$ mit $w_2^i \in \mathcal{S}_{n_2^i}$ usw.
Länge $l(sw_1 \cdots w_n) = 1 + l_1 + \ldots + l_n \ge 1 + n \ge 1$

Definition. Das Paar $(W, \mathcal{S})$ heißt *Wort-Algebra* zur Symbolmenge $\mathcal{S}$
und wird mit $< \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \ldots >$ bezeichnet.

Definition. Definiere $K : < \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \ldots > \to \mathbb{Z}$ durch
$$K(s^1 s^2 \cdots s^l) := 1 - |s^1| + 1 - |s^2| + \ldots + 1 - |s^l|$$
$$= l - n_1 - \ldots - n_l, \text{ falls } s^i \in \mathcal{S}_{n_i}.$$
Insbesondere gilt: $K(s) = 1 - n$, falls $s \in \mathcal{S}_n$

Lemma. Seien $w_1, \dots, w_n \in W$ Worte. Dann gilt:

$$K(w_1 \cdots w_n) = K(w_1) + \dots + K(w_n)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} K(w_1 \cdots w_n) &= K(w_1^1 \cdots w_1^{l_1} \cdots w_n^1 \cdots w_n^{l_n}) \\ &= (1 - |w_1^1|) + \dots + (1 - |w_1^{l_1}|) + \dots + (1 - |w_n^1|) + \dots + (1 - |w_n^{l_n}|) \\ &= K(w_1) + \dots + K(w_n) \end{aligned}$$

$\square$

Definition. Die *Term-Algebra* zur Symbolmenge $\mathcal{S}$ ist definiert als

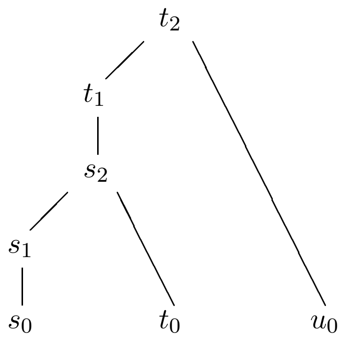
$$\begin{aligned} W_\infty &= \{w \in W : \ w \text{ ableitbar bezüglich } \mathcal{S}\} \\ &= < \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \dots >_\infty \\ &= \overline{\mathcal{S}_0} \text{ (wegen Induktionssatz).} \end{aligned}$$

Also gilt: Term = ableitbares Wort (bezüglich $\mathcal{S}$).

Beispiel. $s_0, t_0, u_0 \in \mathcal{S}_0$ nicht notwendig paarweise verschieden
$s_1, t_1 \in \mathcal{S}_1$
$s_2, t_2 \in \mathcal{S}_2$
Dann ist das Wort $w = t_2 t_1 s_2 s_1 s_0 t_0 u_0$ ein Term:

$$w = t_2 \Big(t_1 \Big(s_2 \big(s_1 \, (s_0) \, t_0 \big) \Big) u_0 \Big).$$

Wir können auch explizit den Ableitungsbaum angeben:



Satz. (Eindeutige Lesbarkeit von Termen).
$< \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \dots >_\infty$ ist Peano-Algebra,
d.h. $\forall$ Term $t \in < \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \dots >_\infty$
$\exists_1 \ s \in \mathcal{S}_n \quad \exists_1$ Terme $t_1, \dots, t_n \in < \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \dots >_\infty$
so daß $t = s t_1 \cdots t_n$.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir die folgenden Lemmata:

Lemma. $K(t) = 1 \quad \forall \ t \in < \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \dots >_\infty$

Beweis. Wir zeigen: $V := \{w \in W : K(w) = 1\}$ ist abgeschlossen in W.

Sei $s \in \mathcal{S}_n, \{w_1, \dots, w_n\} \in V$

$\Longrightarrow K(sw_1 \cdots w_n) = \underbrace{K(s)}_{1-n} + \underbrace{K(w_1)}_{=1} + \ldots + \underbrace{K(w_n)}_{=1} = 1$

$\Longrightarrow sw_1 \cdots w_n \in V$

$\Longrightarrow V \subset W$ abg.

$\Longrightarrow V \supset \overline{\mathcal{S}_0} = W_\infty$

□

Beispiel. $K(s_2 s_1 s_0) = K(s_2) + K(s_1) + K(s_0)$

$= 1 - 2 + 1 - 1 + 1 - 0$

$= 0$

$\Longrightarrow s_2 s_1 s_0 \notin W_\infty$

Für einen Term t sei $t = \overleftarrow{t}\,\overrightarrow{t}$ eine Zerlegung in linkes und rechtes Endstück, beide nicht-leer. Dann sind $\overleftarrow{t}$ und $\overrightarrow{t}$ Worte.

Lemma. $< \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \ldots >_\infty \ni t \quad \Longrightarrow \quad \forall\ \overrightarrow{t} \quad \exists\ m \geq 1 \quad \exists\ t^1, \dots, t^m \in < \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \ldots >_\infty$ so daß $\overrightarrow{t} = t^1 \cdots t^m$ (jedes rechte Endstück eines Terms ist 'Produkt' von Termen).

Beweis. Wir zeigen:

$V := \left\{ t \in \overline{\mathcal{S}_0} : \text{ Jedes rechte Endstück } \overrightarrow{t} \text{ ist Aneinanderreihung von Termen } \right\} \subset \overline{\mathcal{S}_0}$ ist abg.

Sei $s \in \mathcal{S}_n, \quad t_1, \dots, t_n \in V \quad \Longrightarrow \quad$ Alle $\overrightarrow{t_k}$ sind Aneinanderreihungen von Termen

$\overrightarrow{st_1 \cdots t_n} = st_1 \cdots t_n \in \overline{\mathcal{S}_0}$, da $\overline{\mathcal{S}_0}$ abgeschlossen

$= st_1 \cdots t_n \in V \quad \Longrightarrow \quad V$ abg. $\quad \Longrightarrow \quad V = \overline{\mathcal{S}_0}$ minimal

□

Lemma. Sei $t \in W_\infty$. Dann gilt für jedes linke Endstück $\overleftarrow{t} : \overleftarrow{t} \in W_\infty \quad \Longrightarrow \quad \overleftarrow{t} = t$.
(Jedes echte linke Endstück eines Termes ist kein Term).

Beweis. Angenommen, $\overleftarrow{t}$ sei echtes linkes Endstück und $\overleftarrow{t} \in W_\infty$.

$t = \overleftarrow{t}\,\overrightarrow{t}, \overrightarrow{t} \in W$ nicht-leer.

Nach Lemma 2 gilt: $\overrightarrow{t} = t^1 \cdots t^m$ wobei $t \in W_\infty, m \geq 1$.

$\Longrightarrow \quad t = \overleftarrow{t}\, t^1 \cdots t^m$.

Falls $\overleftarrow{t} \in \overline{\mathcal{S}_0} \quad \Longrightarrow \quad 1 = K(t) = \underbrace{K(\overleftarrow{t})}_{=1} + \underbrace{K(t^1)}_{=1} + \ldots + \underbrace{K(t^m)}_{=1}$

$\Longrightarrow \quad m = 0$

Also ist $\overleftarrow{t}$ kein echtes linkes Endstück und $\overleftarrow{t} = t$.

□

Satz. $< \mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_1 | \ldots >_\infty = W_\infty$ ist Peano-Algebra, d.h.

$\forall\ t \in W_\infty \quad \exists_1\ s_n \in \mathcal{S}_n \quad \exists_1\ t_1, \dots, t_n \in W_\infty$, so daß $t = s_n t_1 \cdots t_n$.

Beweis. **Existenz:** Sei $t \in W_\infty \quad \Longrightarrow \quad t$ ableitbar

$\Longrightarrow \exists$ Ableitung $t_1, \dots, t_m, t$ in W^{m+1}

$\Longrightarrow \exists\, s \in \mathcal{S}_n \quad \exists\, \{1 \le i_1 < \dots < i_n \le m\} \subset \{1, \dots, m\}$

so daß $(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}, t) \in \mathcal{G}_s$, d.h. $t = st_{i_1} \cdots t_{i_n}$

Da $\forall\, 1 \le k \le n$ gilt $(t_1, \dots, t_{i_k})$ Ableitung

Also gilt: $t_{i_k} \in W_\infty$.

Eindeutigkeit: $W_\infty \ni t = s_n t_1 \cdots t_n = \tilde{s}_m \tilde{t}_1 \cdots \tilde{t}_m$

wobei $s_n \in \mathcal{S}_n, \tilde{s}_m \in \mathcal{S}_m$ und $t_1, \dots, t_n \in W_\infty \ni \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m$

$\Longrightarrow s_n = \tilde{s}m$ und $t_1 \cdots t_n = \tilde{t}_1 \cdots \tilde{t}_m$

$\Longrightarrow n = m$ wegen $\mathcal{S} = \dot{\bigcup}_{n \ge 0} \mathcal{S}_n$

Behauptung: Für $n \ge 1$ gilt: $t_1 = \tilde{t}_1, \dots, t_n = \tilde{t}_n$

$n = 1$ klar

$1 \le n - 1 \rightsquigarrow n$: Nach Voraussetzung gilt $t_1 \cdots t_n = \tilde{t}_1 \cdots \tilde{t}_n$

$t_1 \in W_\infty \ni \tilde{t}_1, l(t_1) =$ Länge von $t_1 \ge 1 \le l(\tilde{t}_1)$

$w = w^1 \cdots w^l, w \in \mathcal{S}, l = l(w)$

Ohne Einschränkung sei $l(t_1) \le l(\tilde{t}_1) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \overleftarrow{\tilde{t}_1}$ linkes Endstück

Nach Lemma 3 gilt $t_1 = \tilde{t}_1$, da $\overleftarrow{\tilde{t}_1} \in W_\infty$

$\Longrightarrow t_2 \cdots t_n = \tilde{t}_2 \cdots \tilde{t}_n \quad \Longrightarrow \quad t_2 = \tilde{t}_2, \dots, t_n = \tilde{t}_n$

$\Longrightarrow$ Behauptung für n

Nach Induktions-Axiom für $\mathbb{N}$ gilt die Behauptung für alle $n \ge 1 \Longrightarrow$ Eindeutigkeit.

Also ist W_∞ Peano-Algebra, da W_∞ nach Definition minimal.

$\square$