Lösung 1.1.

(i) Seien $x,y,u,v,w,z \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $x = x$ und $y = y$, also $(x,y) \preceq (x,y)$, d.h., $\preceq$ ist reflexiv. Gilt $(x,y) \preceq (u,v) \preceq (x,y)$, so folgt nach Definition

$$x \leqslant y \leqslant x \quad \text{und} \quad u \leqslant v \leqslant u\ ,$$

so dass $x = u$ und $y = v$, also $(x,y) = (u,v)$ folgt. Damit ist $\preceq$ anti-symmetrisch. Sei schließlich $(x,y) \leqslant (u,v) \leqslant (w,z)$. Es folgt

$$x \leqslant u \leqslant w\ , \quad \text{also} \quad x \leqslant w\ ,$$

und damit $x \leqslant w$. Ebenso $y \leqslant z$, so dass nach Definition $(x,y) \preceq (z,w)$.

(ii) Die Ordnung ist nicht total, vgl. $(1,0) \npreceq (0,1)$ und $(0,1) \npreceq (1,0)$.

(iii) Der obere rechte Quadrant inklusive seines Randes.

Lösung 1.2.

Reflexivität ist klar. Sei $(u,v) \preceq (x,y)$ und $(u,v) \neq (x,y)$, d.h. $(u,v) \prec (x,y)$. Zur Anti-Symmetrie ist zu zeigen: $(u,v) \nsucc (x,y)$. Falls $u < x$, ist dies klar. Andernfalls ist $u = x$ und $v < y$. Wäre $(u,v) \succ (x,y)$, so müsste $v > y$ sein, Widerspruch! Also $(u,v) \nsucc (x,y)$ und $\preceq$ ist anti-symmetrisch.

Es gelte nun $(u,v) \preceq (x,y) \preceq (z,w)$. Falls $(u,v) = (x,y)$ oder $(x,y) = (z,w)$, ist zur Transitivität nichts zu zeigen. Œ sei also $(u,v) \prec (x,y) \prec (z,w)$. Es gilt insbesondere $u \leqslant x \leqslant z$. Falls $u < x$, folgt

$$u < x \leqslant z\ , \quad \text{also} \quad u < z\ .$$

Dann ist $(u,v) \prec (z,w)$. Ebenso, wenn $x < z$ ist. Andernfalls ist $u = x = z$ und $u < x < z$. Dann folgt auch $(u,v) \prec (z,w)$. Somit ist $\preceq$ transitiv, also eine Ordnungsrelation.

Bleibt zu zeigen, dass $\preceq$ total ist. Seien dazu $u,v,x,y \in \mathbb{R}$. Falls $u \neq x$, ist entweder $u < x$ oder $u > x$. Im ersten Fall folgt $(u,v) \prec (x,y)$, im zweiten $(u,v) \succ (x,y)$. Sei $u = x$. Falls $v = y$ ist, ist nichts zu zeigen, also Œ $v \neq y$. Dann ist entweder $v < y$ oder $v > y$. Im ersten Fall folgt $(u,v) \prec (x,y)$, im zweiten $(u,v) \succ (x,y)$. Damit ist $\preceq$ total.

Seien $u_1,u_2,v_1,v_2 \in \mathbb{R}$. Schreibe

$$I = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (u_1,v_1) \preceq (u,v) \preceq (u_2,v_2) \right\}\ .$$

Falls $(u_1,v_1) \succ (u_2,v_2)$, ist $I=\varnothing$, und falls $(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$, ist $I=\{(u_1,v_1)\}$. Sei also Œ $(u_1,v_1) \prec (u_2,v_2)$. Dann gilt

$$(u,v)\in I \;\Leftrightarrow\; (u_1<u<u_2)\vee\big((u_1=u<u_2)\wedge(v_1\leqslant u)\big)\vee\big((u_1<u=u_2)\wedge(v\leqslant v_2)\big)$$
$$\vee\big((u_1=u=u_2)\wedge(v_1\leqslant v\leqslant v_2)\big)\ ,$$

also für $u_1<u_2$

$$I=]u_1,u_2[\times\mathbb{R}\cup\{u_1\}\times[v_1,\infty[\cup\{u_2\}\times]-\infty,v_2]$$

und für $u_1=u_2$

$$I=\{u_1\}\times[v_1,v_2]\ .$$

Lösung 1.3.

Die Reflexivität ist trivial nach Definition. Zur Antisymmetrie sei $a_0\cdots a_n \prec b_0\cdots b_m$. Zu zeigen ist $a_0\cdots a_n \not\succ b_0\cdots b_m$.

Zunächst gebe es $i<\min(n,m)$ mit

$$a_0=b_0,\dots,a_i=b_i,a_{i+1}<b_{i+1}\ .$$

Gäbe es $j<\min(n.m)$ mit

$$a_0=b_0,\dots,a_j=b_j,a_{j+1}>b_{j+1}\ ,$$

dann folgte $i=j$: Denn wäre $i>j$, so wäre $i\geqslant j+1$, also $a_{j+1}\leqslant b_{j+1}$, Widerspruch! Analog für $i<j$. Damit wäre $i=j$, was nicht sein kann. Wäre $n>m$ und $a_0=b_0,\dots,a_m=b_m$, so folgte wegen $i+1\leqslant m$, dass $a_{i+1}=b_{i+1}$, Widerspruch! Also in diesem Fall $a_0\cdots a_n \not\succ b_0\cdots b_m$.

Sei nun $n<m$ mit $a_0=b_0,\dots,a_n=b_n$. Damit gibt es kein $j<n=\min(n,m)$ mit $a_{j+1}>b_{j+1}$. Ebenso ist nicht $n>m$, also folgt auch in diesem Fall $a_0\cdots a_n \not\succ b_0\cdots b_m$ und $\preceq$ ist anti-symmetrisch.

Sei nun

$$a_0\cdots a_n \preceq b_0\cdots b_m \preceq c_0\cdots c_p\ .$$

Ist $a_0\cdots a_n=b_0\cdots b_m$ oder $b_0\cdots b_m=c_0\cdots c_p$, so ist zur Transititivität nichts zu zeigen, so dass man Œ annehmen kann, dass

$$a_0\cdots a_n \prec b_0\cdots b_m \prec c_0\cdots c_p\ .$$

Es gebe zunächst $i<\min(n,m)$ mit

$$a_0=b_0,\dots,a_i=b_i,a_{i+1}<b_{i+1}\ .$$

Gibt es $j<\min(m,p)$ mit

$$b_0=c_0,\dots,b_j=c_j,b_{j+1}<c_{j+1}\ ,$$

so setze $k=\min(i,j)$. Dann gilt

$$a_0=b_0=c_0,\dots,a_k=b_k=c_k\ .$$

Ist $j<i$, so folgt $k=j$ und $k+1\leqslant i$, also

$$a_{k+1}=b_{k+1}<c_{k+1}\ ,\quad \text{so dass}\quad a_{k+1}<c_{k+1}\ .$$

Ist $j \geqslant i$, so ist $k = i$ und $k+1 \leqslant j+1$, also

$$a_{k+1} < b_{k+1} \leqslant c_{k+1} \;, \quad \text{so dass} \quad a_{k+1} < c_{k+1} \;.$$

In jedem Fall $a_0 \cdots a_n \prec c_0 \cdots c_p$.
Ist andererseits $m < p$ und $b_0 = c_0, \cdots, b_m = c_m$, so folgt mit $i < m = \min(m,p)$

$$a_0 = b_0 = c_0, \ldots, a_i = b_i = c_i, a_{i+1} < b_{i+1} = c_{i+1} \;,$$

also auch in diesem Fall $a_0 \cdots a_n \prec c_0 \cdots c_p$.
Nun sei $n < m$ und $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$. Falls es $j < \min(m,p)$ mit

$$b_0 = c_0, \ldots, b_j = c_j . b_{j+1} < c_{j+1}$$

gibt, so ist entweder $j < n$ oder $n \leqslant j$. Im ersten Fall folgt $j+1 \leqslant n$, also

$$a_0 = b_0 = c_0, \ldots, a_j = b_j = c_j, a_{j+1} = b_{j+1} < c_{j+1} \;.$$

Im zweiten Fall ist $n \leqslant j < \min(m,p) \leqslant p$, also $n < p$ und

$$a_0 = b_0 = c_0, \ldots, a_n = b_n = c_n \;.$$

In jedem Fall $a_0 \cdots a_n \prec c_0 \cdots c_p$.
Falls $m < p$ mit $b_0 = c_0, \ldots, b_m = c_m$ ist, folgt $n < m < p$, also $n < p$ und

$$a_0 = b_0 = c_0, \ldots, a_n = b_n = c_n \;,$$

so dass auch in diesem Fall $a_0 \cdots a_n \prec c_0 \cdots c_p$ gilt. Damit ist $\preceq$ transitiv und somit eine Ordnung.
Bleibt zu zeigen, dass $\preceq$ total ist. Seien $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in A$ beliebig, so dass $a_0 \cdots a_n \npreceq b_0 \cdots b_m$. Zu zeigen ist, dass $a_0 \cdots a_n \succ b_0 \cdots b_m$. Da die Wörter ungleich sind, gibt es ein $i < \min(n.m)$ mit $a_{i+1} \neq b_{i+1}$, oder es gilt $n \neq m$ und $a_0 = b_0, \ldots, b_0 = b_m$.
Im ersten Fall sei i Œ minimal mit dieser Eigenschaft, so dass $a_0 = b_0, \ldots, a_i = b_i$. Es kann nicht $a_{i+1} < b_{i+1}$ gelten, also folgt aus der Totalität der Ordnung $\leqslant$ auf A, dass $a_{i+1} > b_{i+1}$. Dann ist $a_0 \cdots a_n \succ b_0 \cdots b_m$.
Im zweiten Fall kann nicht $n < m$ gelten, also ist $n > m$. Damit ist auch in diesem Fall $a_0 \cdots a_n \succ b_0 \cdots b_m$.

Lösung 1.4.
Für $x \in K$ ist $x^2 \geqslant 0$. Denn entweder ist $x \geqslant 0$ oder $x < 0$. Im ersten Fall folgt $x^2 = x \cdot x \geqslant x \cdot 0 = 0$. Im zweiten Fall ist $x < 0$. Dann ist $-x > 0$, denn wäre $-x < 0$, würde $0 = 0 + 0 > x + (-x) = 0$ folgen, Widerspruch! Also ist dann $-x > 0$, und es folgt $x^2 = (-x) \cdot (-x) \geqslant 0$.
Ist $x \in K \setminus \{0\}$, so gilt $x^2 \neq 0$ (Nullteilerfreiheit), also $x^2 > 0$.
Seien nun $x, y \in K$ mit $x^2 + y^2 = 0$. Wäre $x \neq 0$, so würde $x^2 > 0$ folgen. Da $y^2 \geqslant 0$, folgte

$$x^2 + y^2 > 0 + y^2 = y^2 \geqslant 0 \;, \quad \text{also} \quad x^2 + y^2 > 0 \;,$$

Widerspruch! Damit ist $x = 0$. Ebenso für y. Damit ist $x = y = 0$ und die Behauptung bewiesen.

Lösung 2.1.

(i) Es gilt mit Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leqslant d(x,a)+d(a,y) = d(x,a)+d(y,a) \leqslant r+r = 2r \ .$$

(ii) Seien $x,y \in M_r[a] \cup M_s[b]$. Falls $x,y \in M_r[a]$ gilt, folgt mit dem ersten Teil

$$d(x,y) \leqslant 2r \leqslant 2r+2s = 2(r+s) \ .$$

Ebenso, wenn $x,y \in M_s[b]$. Sei nun $x \in M_r[a], y \in M_s[b]$. Sei $c \in M_r[a] \cap M_s[b]$. Es gilt mit dem ersten Teil und der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leqslant d(x,c)+d(c,y) = d(x,c)+d(y,c) \leqslant 2r+2s = 2(r+s) \ .$$

Ebenso im umgekehrten Fall. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lösung 2.2.
Es gilt $d(a,b) > 0$. Sei also $0 < r < \frac{1}{2} \cdot d(a,b)$. Wäre $M_r[a] \cap M_r[b] \neq \varnothing$, so würde mit $c \in M_r[a] \cap M_s[b]$ folgen

$$d(a,b) \leqslant d(a,c)+d(c,b) \leqslant 2r < d(a,b) \ , \quad \text{Widerspruch!}$$

Also ist $M_r[a] \cap M_r[b] = \varnothing$.

Lösung 2.3.

(i) Sei zunächst

$$0 = d\big(x_1,x_2),(y_1,y_2\big) = d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2) \ .$$

Dann gilt $0 = d_1(x_1,y_1) = d_2(x_2,y_2)$. Denn wäre etwa $d_1(x_1,y_1) > 0$, so folgte wegen $d_2(x_2,y_2) \geqslant 0$, dass $d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2) > 0$, Widerspruch!
Aber da d_1,d_2 Metriken sind, folgt $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.
Weiter gilt

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2) = d_1(y_1,x_1)+d_2(y_2,x_2) = d\big((y_1,y_2),(x_1,x_2)\big) \ .$$

Schließlich

$$\begin{aligned} d\big((x_1,x_2),(z_1,z_2)\big) &= d_1(x_1,z_1)+d_2(x_2,z_2) \leqslant d_1(x_1,y_1)+d_1(y_1,z_1)+d_2(x_2,z_2) \\ &\leqslant d_1(x_1,y_1)+d_1(y_1,z_1)+d_2(x_2,y_2)+d_2(y_2,z_2) \\ &= d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)+d\big((y_1,y_2),(z_1,z_2)\big)\ . \end{aligned}$$

Damit ist d eine Metrik.

(ii) Eine rechtwinklige, gleichseitige Raute mit Zentrum (a_1,a_2) und Seitenlänge $\sqrt{2}\cdot r$.

Lösung 2.4.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = 0\ .$$

Nach Aufgabe 4, Blatt 1, kann $\mathbb{C}$ somit kein total geordneter Körper sein.

Lösung 3.1.

(i) Es gilt $\bigcap_{s>r} M_s(a) = M_r[a]$. Denn sei $x \in M_r[a]$ und $s > r$. Dann gilt $d(x,a) \leqslant r < s$, also $x \in M_s(a)$ und somit $M_r[a] \subset \bigcap_{s>r} M_s(a)$. Sei umgekehrt $x \in \bigcap_{s>r} M_s(a)$. Dann gilt $d(x,a) < s$ für alle $s > r$. Wäre $d(x,a) > r$, so wäre $\varepsilon := d(x,a) - r > 0$. Dann wäre

$$r + \frac{\varepsilon}{2} > r \ , \quad \text{also} \quad d(x,a) < r + \frac{\varepsilon}{2} < r + \varepsilon = d(x,a) \ ,$$

Widerspruch! Damit $d(x,a) \leqslant r$ und $x \in M_r[a]$.
Es gilt auch $\bigcup_{r<s} M_r[a] = M_s(a)$. Denn sei $x \in \bigcup_{r<s} M_r[a]$. Dann $x \in M_r[a]$ für ein $r < s$. Es folgt $d(x,a) \leqslant r < s$, also $x \in M_s(a)$. Sei umgekehrt $x \in M_s(a)$. Dann gilt $d(x,a) < s$. Mit $\varepsilon := s - d(x,a) > 0$ gilt

$$s > s - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \cdot \big(s + d(x,a)\big) > \frac{1}{2} \cdot \big(d(x,a) + d(x,a)\big) = d(x,a) \ ,$$

also $x \in M_{s-\frac{\varepsilon}{2}}[a]$ und somit $M_s(a) \subset \bigcup_{r<s} M_r[a]$.

(ii)

(a) Es gilt $]0,1] \subset \bigcup_{n\geqslant 1}]0,\frac{1}{n}]$ und für alle $n \geqslant 1$ $]0,\frac{1}{n}] \subset]0,1]$, also

$$\bigcup_{n\geqslant 1}]0,\frac{1}{n}] =]0,1] \ .$$

(b) Offenbar $\bigcap_{n\geqslant 1} [-\frac{1}{n}, 0[\subset [-1,0[$. Sei $-1 \leqslant x < 0$. Es gibt ein $n \geqslant 1$ mit $x < -\frac{1}{n}$, so dass $x \notin \bigcap_{n\geqslant 1} [-\frac{1}{n}, 0[$. Es folgt

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \Big[-\frac{1}{n}, 0\Big[= \varnothing \ .$$

(c) Offenbar gilt $0 \in \bigcap_{n\geqslant 1} [-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]$. Sei $x \neq 0$. Dann ist $|x| > 0$. Es gibt ein $n \geqslant 1$ mit $|x| > \frac{2}{n}$, d.h. $x \notin [-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]$. Damit ist

$$\bigcap_{n\geqslant 1} = \Big[-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}\Big] = \{0\} \ .$$

Lösung 3.2.

(i) Da $\mathbb{R}_r(0) =]-r,r[$ und $\mathbb{R}_r[0] = [-r,r]$, folgt mit $I_n =]-n-1,n+1[$ für alle $n \geqslant 1$ wie in Aufgabe 1 (i)

$$\bigcap_{n\geqslant 1} I_n = [-1,1] \ .$$

(ii) Analog zu (i) nimmt man $J_n = [\frac{1}{n}-1, -\frac{1}{n}+1]$, so dass wie in Aufgabe 1 (i) folgt

$$\bigcup_{n\geqslant 1} J_n =]-1,1[\ .$$

Lösung 3.3.

(i) Seien $(a_n),(b_n),(c_n) \in M$. Es gilt $(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n) \in M$. Somit ist M unter $+$ abgeschlossen. Zudem

$$\begin{aligned}\big((a_n)+(b_n)\big)+(c_n) &= (a_n+b_n)+(c_n) = \big((a_n+b_n)+c_n\big) \\ &= \big(a_n+(b_n+c_n)\big) = (a_n)+(b_n+c_n) = (a_n)+\big((b_n)+(c_n)\big) \ .\end{aligned}$$

Also ist $+$ assoziativ. Weiter

$$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n) = (b_n+a_n) = (b_n)+(a_n) \ ,$$

also ist $+$ kommutativ. Mit $0 := (0) \in M$ gilt

$$(a_n)+0 = (a_n)+(0) = (a_n+0) = (a_n) \ .$$

Damit hat $+$ das neutrale Element 0. Schließlich

$$(a_n)+(-a_n) = (a_n-a_n) = (0) = 0 \ ,$$

so dass M eine abelsche Gruppe ist. Für ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere

$$\lambda\cdot(a_n) := (\lambda\cdot a_n) \ .$$

Es gilt $1\cdot(a_n) = (1\cdot a_n) = (a_n)$ und

$$\begin{aligned}\lambda\cdot\big((a_n)+(b_n)\big) &= \lambda\cdot(a_n+b_n) \\ &= \big(\lambda\cdot(a_n+b_n)\big) = (\lambda\cdot a_n+\lambda\cdot b_n) \\ &= (\lambda\cdot a_n)+(\lambda\cdot b_n) = \lambda\cdot(a_n)+\lambda\cdot(b_n) \ .\end{aligned}$$

Ähnlich prüft man, dass $(\lambda+\mu)\cdot(a_n) = \lambda\cdot(a_n)+\mu\cdot(a_n)$ und $\lambda\cdot(\mu\cdot(a_n)) = (\lambda\cdot\mu)\cdot(a_n)$. Damit ist M ein Vektorraum.

(ii) Es gilt $a_n - a_n = 0$, also $(a_n) \sim (b_n)$. Gelte $(a_n) \sim (b_n)$. Es gilt

$$b_n - a_n = -(a_n-b_n) \to -0 = 0 \ ,$$

also $(b_n) \sim (a_n)$. Gelte $(a_n) \sim (b_n)$ und $(b_n) \sim (c_n)$. Dann folgt

$$a_n - c_n = (a_n-b_n)+(b_n-c_n) \to 0+0 = 0 \ .$$

Damit ist $(a_n) \sim (c_n)$ und $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Lösung 3.4.
Es gilt $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (a_n) - (b_n) \in N = \{(c_n) \mid c_n \to 0\}$. Reicht zu zeigen, dass N ein Untervektorraum von M ist, denn dann ist $M/N = M/\sim$ ein Vektorraum.
Offenbar $0 \in N$. Seien $(a_n), (b_n) \in N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lambda \cdot a_n + b_n \to \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \; ,$$

also $\lambda \cdot (a_n) + (b_n) \in N$. Damit ist N ein Untervektorraum.

Lösung 4.1.

(i) Sei $(a_n) \subset M$, $a_n \to a$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $M_\varepsilon(a) \subset U$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(a, a_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geqslant n_0 \, .$$

Es folgt für $n \geqslant n_0$: $d(a, a_n) < \varepsilon$, also $a_n \in M_\varepsilon(a) \subset U$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(ii) Man nehme an, dass U nicht offen ist, d.h., es gibt $a \in U$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $b \in M$ existiert mit $d(a,b) < \varepsilon$, aber $b \notin U$. Für jedes $n \geqslant 1$ gibt es damit $a_n \in M \setminus U$ mit $d(a, a_n) < \frac{1}{n}$.
Die Folge (a_n) konvergiert gegen a. Denn sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geqslant n_0$ gilt $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, also

$$d(a, a_n) < \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \, .$$

Damit $a_n \to a$. Nach Voraussetzung gilt $a_n \in U$ für fast alle n, ein Widerspruch zur Konstruktion der Folge! Somit ist U offen.

Lösung 4.2.

(i) Es gilt $(3) \to 3$ und

$$\left| 0 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \to 0$$

nach Vorlesung. Also gilt $a_n = 3 - \frac{(-1)^n}{n^2} \to 3$ als Summe zweier konvergenter Folgen.

(ii) Es gilt $\frac{1}{n+1} \to 0$. Wäre $(a_n) \to a$, so würde

$$n = a_n + \frac{1}{n+1} \to a + 0 = a$$

folgen, so dass (n) konvergieren würde. Ist aber $\varepsilon > 0$, so gilt für $n > a + \varepsilon$

$$|a - n| = n - a > \varepsilon \, ,$$

ein Widerspruch zur Konvergenz!

(iii) (a_n) ist keine Cauchfolge, denn $|a_{n+1} - a_n| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit konvergiert (a_n) nicht.

Lösung 4.3.

(i) Es gilt

$$\frac{n^2+14}{7+n-n^2} = \frac{1+\frac{14}{n^2}}{\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n}-1} .$$

Es gilt $\frac{1}{n} \to 0$, also als Produkt $\frac{a}{n^2} \to 0$ und als Summen $1+\frac{14}{n^2} \to 1$, $\frac{7}{n^2} + \frac{1}{n} - 1 \to -1 \neq 0$. Als Quotient gilt

$$a_n = \frac{1+\frac{14}{n^2}}{\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n}-1} \to \frac{1}{-1} = -1 .$$

(ii) Analog zu (i) folgt

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} \to 0 + \frac{1}{1} = 1 .$$

(iii) Ebenso folgt

$$\frac{n+1}{2n-1} \cdot \frac{n^3}{1+n^3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^3}+1} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} .$$

(iv) Es gilt wie oben

$$\frac{n^2+1}{n^3+1} \cdot \left(3+\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}\left(3+\frac{1}{n}\right) \to 0 \cdot (3+0) = 0 .$$

Lösung 4.4.
Sei $\varepsilon > 0$. Setze

$$\delta = \min\left(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+|\alpha|)}, \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+\|x\|)}\right) > 0 .$$

Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|\alpha - \alpha_n| \leqslant \delta \quad \text{für alle } n \geqslant n_0$$

und es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x - x_n\| \leqslant \delta \quad \text{für alle } n \geqslant m_0 .$$

Dann gilt für $p_0 = \max(n_0.m_0)$ und $n \geqslant p_0$:

$$\begin{aligned}
\|\alpha \cdot x - \alpha_n \cdot x_n\| &\leqslant \|\alpha \cdot x - \alpha_n \cdot x\| + \|\alpha_n \cdot x - \alpha_n \cdot x_n\| \\
&= |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x\| + |\alpha_n| \cdot \|x - x_n\| \\
&= |\alpha - \alpha_n| \cdot (\varepsilon + \|x\|) + (|\alpha_n - \alpha| + |\alpha|) \cdot \|x - x_n\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|x\|)} \cdot (\varepsilon + \|x\|) + (\varepsilon + |\alpha|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + |\alpha|)} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Lösung 5.1.
Sei $(a_n) \subset M$ eine Folge. Genau ist (a_n) eine Cauchy-Folge, wenn sie schließlich konstant wird, d.h. falls es $a \in M$ gibt mit

$$a_n = a \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N} .$$

In der Tat: Dass die Bedingung hinreichend ist, ist klar. Sei also (a_n) Cauchy. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(a_k, a_l) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{für alle } \ k, l \geqslant n_0 .$$

Insbesondere gilt $d(a_n, a_{n_0}) < \frac{1}{2}$ für alle $n \geqslant n_0$. Damit ist $d(a_n, a_{n_0}) = 0$, also $a_n = a_{n_0}$, so dass die Behauptung mit $a = a_{n_0}$ folgt.
Offenbar konvergiert eine schließlich konstante Folge. Da jede konvergente Folge auch Cauchy ist, folgt mit dem obigen, dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_n) schließlich konstant ist, genau dann, wenn (a_n) Cauchy ist. Insbesondere ist (M, d) vollständig.

Lösung 5.2.
Sei φ in 1 stetig. Da $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$, folgt, dass

$$a_n = \varphi\Big(\frac{n-1}{n}\Big) \to \varphi(1) = a .$$

Umgekehrt gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $(b_n) \subset N$ mit $b_n \to 1$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi(b_n) = \varphi(1)$. In der Tat: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \geqslant 1$ mit

$$d(a, a_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 .$$

Da $\frac{1}{n_0} > 0$, existiert ein $k_0 \geqslant 1$ mit

$$|1 - b_k| \leqslant \frac{1}{n_0} \quad \text{für alle } \ k \geqslant k_0 .$$

Sei $k \geqslant k_0$. Falls $b_k = 1$, gilt $d(\varphi(1), \varphi(b_k)) = d(a, a) = 0 \leqslant \varepsilon$. Falls $b_k = \frac{l-1}{l}$ mit $l \geqslant 1$, so gilt $b_k \leqslant 1$ und

$$\frac{1}{n_0} \geqslant |1 - b_k| = 1 - \frac{l-1}{l} = \frac{1}{l} .$$

Damit folgt $l \geqslant n_0$, also

$$d(\varphi(1), \varphi(b_k)) = d(a, a_l) \leqslant \varepsilon .$$

Damit folgt $\lim_{k\to\infty}\varphi(b_k)=\varphi(1)$. Also ist φ tatsächlich in 1 stetig.

Lösung 5.3.

(i) Seien $x,y\in\mathbb{R}$. Da beide Seiten der Gleichung invariant unter Vertauschung von x und y sind, seine ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x\geqslant y$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+x-y)=x=\max(x,y)\ .$$

(ii) Seien f und g stetig. Dann sind $f+g$ und $f-g$ stetig. Da $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig ist, folgt, dass $|f-g|$ stetig sind. Dann ist auch

$$\max(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)\quad \text{stetig.}$$

Lösung 5.4.

(i) Für $f(x)=x^3-2$ und $g(x)=x^2+1$ gilt: f und g sind stetig und $g(x)\geqslant 1>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Daher ist

$$\varphi=\frac{f}{g}\quad \text{stetig.}$$

(ii) Wie in (i) sieht man, dass φ in allen $x\neq -1$ stetig ist. Allerdings ist φ nicht in -1 stetig. Falls $|x+1|<\frac{1}{2}$, gilt $x<-\frac{1}{2}$, also $|x-1|>\frac{3}{2}$, also

$$|\varphi(-1)-\varphi(x)|=\varphi(x)>3\quad \text{für alle}\ \ x\neq -1,|x+1|<\frac{1}{2}\ .$$

Damit kann φ nicht in -1 stetig sein.

(iii) Wie in (ii) sieht man, dass φ nicht in 1 stetig ist.

(iv) Offenbar ist φ in $x\neq 0$ stetig. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty}a_n^2=0=\lim_{n\to\infty}(-a_n)$ für alle Folgen $(a_n)\to 0$. Sei also $(a_n)\to 0$. Sei $\varepsilon>0$. Es gibt $n_0\in\mathbb{N}$, so dass

$$\left|a_n^2\right|\leqslant\varepsilon\quad \text{für alle}\ \ n\geq n_0\ .$$

Auch gibt es $m_0\in\mathbb{N}$, so dass

$$|-a_n|=|a_n|\leqslant\varepsilon\quad \text{für alle}\ \ n\geqslant m_0\ .$$

Dann gilt

$$|\varphi(0)-\varphi(a_n)|=|\varphi(a_n)|\leqslant\max(|-a_n|,\left|a_n^2\right|)\leqslant\varepsilon\quad \text{für alle}\ \ n\geqslant\max(n_0,m_0)\ .$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty}\varphi(a_n)=0=\varphi(0)$. Damit ist φ auch in 0 stetig.

Lösung 6.1.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(b, b_n) \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ und $d(c, c_n) \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant m_0$. Sei $m \geqslant 2\max(n_0, m_0) + 1$. Falls $m = 2n$, gilt

$$d(a_m, b) = d(b_n, b) \leqslant \varepsilon \; .$$

Falls $m = 2n + 1$, gilt

$$d(a_m, b) = d(c_n, c) \leqslant \varepsilon \; .$$

Damit $a_n \to b = c$.

(ii) Es gilt $d(b, c) > 0$. Sei $\frac{d(b,c)}{2} > \varepsilon > 0$. Es gibt $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(b, b_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_0$ und $d(c, c_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant m_0$. Sei $m \geqslant 2\max(n_0, m_0) + 1$. Sei $m = 2n$. Dann gilt mit Dreiecksungleichung

$$d(a_m, a_{m+1}) = d(b_n, c_n) \geqslant d(b, c) - d(b_n, b) - d(c_n, c) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \; .$$

Sei $m = 2n + 1$. Dann gilt analog

$$d(a_m, a_{m+1}) = d(b_{n+1}, c_n) \geqslant d(b, c) - d(b_{n+1}, b) - d(c_n, c) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \; .$$

Also ist (a_n) keine Cauchyfolge, insbesondere nicht konvergent.

Lösung 6.2.

Die Folge (a_n) is monoton wachsend und beschränkt, denn aus $a_{n+1}, b_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n = [a_n, b_n]$ folgt $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n$ und $b_{n+1} \leqslant b_n$, so dass durch Induktion $b_n \leqslant b_0$. Damit auch $a_n \leqslant b_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also konvergiert (a_n) gegen $a = \sup_n a_n \in \mathbb{R}$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Da $a_n \leqslant b_k$ für alle $n \geqslant k$, ist b_k eine obere Schranke für $(a_n)_{n \geqslant k}$, also $a \leqslant b_k$, da a die kleinste obere Schranke ist. Weiter $a \geqslant a_k$. Damit ist $a \in I_k$. Da k beliebig war, folgt $a \in \bigcap_n I_n$.

Lösung 6.3.

Sei f stetig und $i \in I$. Sei $x \in U_i$ und $\varepsilon > 0$. f ist in x stetig, also existiert $\delta > 0$ mit

$$d_X(x, y) \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X \; ,$$

insbesondere für $y \in U_i$. Damit ist $f\big|_{U_i}$ stetig.

Sei $f\big|_{U_i}$ stetig für alle $i \in I$. Sei $x \in X$. Es gibt $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es $\delta_0 > 0$ mit $X_{\delta_0}(x) \subset U_i$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f\big|_{U_i}$ stetig ist, gibt es $\delta_1 > 0$ mit

$$d_X(x,y) \leqslant \delta_1 \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_i \ .$$

Sei $\delta := \min(\delta_0, \delta_1) > 0$. Sei $y \in X$, $d_X(x,y) \leqslant \delta$. Dann ist $y \in X_{\delta_0}(x) \subset U_i$ und

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon \ .$$

Da y beliebig aus X war, folgt, dass f stetig in x ist. Da x beliebig war, folgt, dass f stetig ist.

Lösung 6.4.

(i) Die Folge $\left(\frac{n-2}{n}\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ ist wachsend: Denn für $m \geqslant n$ gilt $\frac{2}{m} \leqslant \frac{2}{n}$, also $-\frac{2}{m} \geqslant -\frac{2}{n}$. Sie ist nach oben beschränkt durch 1. Also gilt

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{n-2}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1 \ .$$

(ii) Für $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ gilt $|a_n| = 1 - \frac{1}{n^2}$ wachsend (wie (i)). Zudem

$$a_{2n} \geqslant 0 \geqslant a_{2n+1} \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Damit ist $\inf_n a_n = \inf_n a_{2n+1}$. Die Folge $a_{2n+1} = \frac{1}{n^2} - 1$ ist fallend und nach unten beschränkt durch -1, also konvergent mit

$$\inf_n a_n = \inf_n a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = -1 \ .$$

Lösung 7.1.

(i) Es gilt $1 \geqslant \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \geqslant 0$ und somit $M_1 \subset [0,2]$. Damit ist M_1 beschränkt. M_1 ist jedoch nicht abgeschlossen, da $M_1 \ni \frac{n-1}{n} \to 1 \notin M_1$. Insbesondere ist M_1 nicht kompakt.

(ii) Es gilt $2 \geqslant \frac{n^2+1}{n^2} \geqslant 1$, also $M_2 \subset [0,2]$ und somit beschränkt. Weiterhin ist M_2 abgeschlossen, denn $[0,1]$ ist abschlossen, und ferner ist

$$N = \{1\} \cup \left\{ \frac{n^2+1}{n^2} \;\middle|\; n \geqslant 1 \right\}$$

abgeschlossen. In der Tat: Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{R} \setminus N$ offen ist. Sei also $a \notin N$. Dann ist $a \neq 1$ und $\varepsilon := \frac{|1-a|}{3} > 0$. Da $a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \to 1$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|1 - a_n| \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Sei

$$\delta := \frac{1}{2} \cdot \min\bigl(|a - a_1|, \ldots, |a - a_{n_0-1}|\bigr) > 0$$

und $r := \min(\varepsilon, \delta) > 0$. Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $|a - b| \leqslant r$. Dann gilt für alle $n \geqslant n_0$

$$|b - a_n| \geqslant |1 - a| - |a - b| - |1 - a_n| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0 \,,$$

für $n < n_0$

$$|b - a_n| \geqslant |a_n - a| - |a - b| \geqslant 2\delta - \delta = \delta > 0$$

und schließlich

$$|b - 1| \geqslant |1 - a| - |a - b| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon > 0 \,.$$

Damit ist $b \notin N$, also $\mathbb{R}_r[a] \subset \mathbb{R} \setminus N$. Das heißt, N ist abgeschlossen und somit auch M_2.
Da M_2 beschränkt und abgeschlossen ist, ist M_2 kompakt.

(iii) M_3 ist offenbar nicht beschränkt und somit auch nicht kompakt. M_3 ist aber abgeschlossen. Denn sei $(a_n) \subset M_3$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge. Dann ist (a_n) nach oben beschränkt durch ein $R > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 + 1 > R \geqslant n_0$. Damit folgt

$$a_k \in A := \bigcup_{n=1}^{n_0} \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \,.$$

Die Menge A ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen, also gilt $a \in A \subset M_3$. Da (a_n) beliebig war, folgt, dass M_3 abgeschlossen ist.

Lösung 7.2.

(i) Sei $s = \sup(-X)$. Es gilt $s \geqslant -X$, also $-s \leqslant X$, d.h. $-s \leqslant \inf(X)$. Sei nun $t \leqslant X$ eine weitere untere Schranke. Dann ist $-t \geqslant -X$, also $-t \geqslant \sup(-X) = s$. Es folgt $t \leqslant -s$, so dass $-s$ die größte untere Schranke von X ist. Also

$$-\sup(-X) = -s = \inf(X) .$$

(ii) Falls $s \geqslant M \cup N$, folgt $s \geqslant M$ und $s \geqslant N$, also $s \geqslant \max(\sup(M), \sup(N)) =: m$. Insbesondere gilt dies für $s = \sup(M \cup N)$. Wäre m also eine obere Schranke von $M \cup N$, so wäre es die kleinste. Sei also $a \in M \cup N$. Dann ist $a \in M$ oder $a \in N$. Also gilt $a \leqslant \sup M \leqslant m$ oder $a \leqslant \sup N \leqslant m$. Somit in jedem Fall $a \leqslant m$. Damit ist $m \geqslant M \cup N$ und es folgt $\sup(M \cup N) = m = \max(\sup(M), \sup(N))$.
Jetzt folgt

$$\begin{aligned}\inf(M \cup N) &= -\sup(-M \cup -N) = -\max(\sup(-M), \sup(-N)) \\ &= \min(-\sup(-M), -\sup(-N)) = \min(\inf(M), \inf(N)) .\end{aligned}$$

Lösung 7.3.

Sei $(a_n) \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j$. Da $\mathbb{N}$ unendlich ist und $\{1, \ldots, n\}$ endlich, gibt es ein $1 \leqslant j \leqslant n$, so dass $a_n \in K_j$ für unendlich viele n. D.h., es gibt eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n), so dass $(a_{n_k}) \subset K_j$. Da K_j kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})$ von (a_{n_k}), die konvergiert. $(a_{n_{k_j}})$ ist eine Teilfolge von (a_n). Da (a_n) beliebig war, folgt die Behauptung.
Die Aussage gilt nicht für unendliche Vereinigungen. Denn sei M nicht-kompakt (insbesondere unendlich), etwa $M = \mathbb{N}$. Dann gilt $M = \bigcup_{a \in M} \{a\}$ und für alle $a \in M$ ist $\{a\}$ kompakt, da endlich.

Lösung 7.4.

Sei $(s_n) \subset S$ konvergent gegen $s \in \mathbb{R}$. Dann ist (s_n) beschränkt durch ein $R > 0$. Sei $x \in X$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $s_n \geqslant x$, also $s_n \in [x, R]$. Damit folgt $s \in [x, R]$. Da x beliebig war, folgt $s \geqslant X$, so dass $s \in S$. Da (s_n) beliebig war, folgt, dass S abgeschlossen ist.

Lösung 8.1.

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$X_k = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \geqslant k, n \text{ gerade} \right\} \quad \text{und}$$
$$Y_k = \left\{ -1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \geqslant k, n \text{ ungerade} \right\} .$$

Es gilt $Y_k \leqslant X_k$ und somit

$$sup_{n \geqslant k} a_n = \sup(X_k \cup Y_k) = \max(\sup X_k, \sup Y_k) = \sup X_k .$$

Da die Folge $1 + \frac{1}{n}$ fallend ist, folgt

$$\sup X_k = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k} & k \text{ gerade,} \\ 1 + \frac{1}{k+1} & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\limsup_{n \to \infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \inf_{k \geqslant 1} \sup X_k = \inf_{k \geqslant 1} 1 + \frac{1}{2k}$$

Da $1 + \frac{1}{2k} \rightsquigarrow 1$ nach Archimedes und Grenzwertsätzen, ist diese Folge beschränkt, insbesondere nach unten beschränkt. Die Folge ist fallend, also folgt mit dem Konvergenzsatz für monotone Folgen

$$\limsup_{n \to \infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{k \to \infty} 1 + \frac{1}{2k} = 1 .$$

Damit folgt

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = -\limsup_{n \to \infty} -(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 ,$$

da der $\limsup$ der Folge $-a_n$ ebenfalls 1 ist.

(ii) Wie oben sieht man

$$\limsup_{n \to \infty} b_n = \inf_{k \geqslant 1} 1 + \frac{1}{2k} = 1 .$$

Weiter $\limsup_{n \to \infty} b_n = -1$. Dann folgt $\liminf_{n \to \infty} b_n = 1$.

(iii) Setze $d_k = \sup_{n\geqslant k} a_n$ und $e_k = \sup_{n\geqslant k} b_n$. Da (a_n) und (b_n) beschränkt sind und die Folgen (d_k) und (e_k) fallend sind, konvergieren sie mit

$$\lim_k d_k = \inf_k d_k \quad \text{und} \quad \lim_k e_k = \inf_k e_k \; .$$

Da $d_k, e_k \geqslant 0$, ist auch $(d_k \cdot e_k)$ fallend. Mit den Grenzwertsätzen folgt

$$\inf_k (d_k \cdot e_k) = \lim_k (d_k \cdot e_k) = \lim_k d_k \cdot \lim_k e_k = \limsup_k d_k \cdot \limsup_k e_k \; .$$

Aber es gilt (wie in (i))

$$\sup_{n\geqslant n} a_n \cdot b_n = \begin{cases} a_k \cdot b_k & k \text{ gerade,} \\ a_{k+1} \cdot b_{k+1} & k \text{ ungerade} \end{cases} = d_k \cdot e_k \; .$$

Damit

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n = 1 \cdot 1 = 1 \; .$$

Ähnlich gilt auch

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = -\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot (-b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n = 1 \cdot (-1) = -1 \; .$$

Lösung 8.2.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$d(a_n, a_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \; n,m \geqslant n_0 \; .$$

Weiter gibt es $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$d\big(a, a_{j(k)}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \; k \geqslant m_0 \; .$$

Setze $k_0 = \max(n_0, m_0)$. Sei $n \geqslant k_0$. Dann ist $j(n) \geqslant n \geqslant k_0 \geqslant n_0$, also

$$d(a, a_n) \leqslant d\big(a, a_{j(n)}\big) + d\big(a_{j(n)}, a_n\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $a_n \rightsquigarrow a$.

Lösung 8.3.

(i) Seien $a_n \in X$ eine Cauchy-Folge und $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, so dass

$$d(x,y) \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \; x,y \in X \; .$$

Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(a_n, a_m) \leqslant \delta \quad \text{für alle } \; n,m \geqslant n_0 \; .$$

Seien $n,m \geqslant n_0$. Dann gilt $d(a_n, a_m) \leqslant \delta$, also $d(f(a_n), f(a_m)) \leqslant \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $(f(a_n))$ eine Cauchy-Folge in Y.

(ii) Die Folge $a_n = \frac{1}{n} \in]0,\infty[$ ist eine Cauchy-Folge, denn sie konvergiert in $\mathbb{R}$. Es gilt $f(a_n) = n^2$ und diese Folge konvergiert nicht in $\mathbb{R}$, da sie nicht beschränkt ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist sie also auch keine Cauchy-Folge. Damit ist f nicht gleichmäßig stetig nach (i).

Lösung 8.4.
Man nehme an, dass (a_n) nicht gegen a konvergiert, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$

$$d(a_n, a) > \varepsilon \quad \text{für ein } n \geqslant n_0 \,.$$

Sei $j(0) \geqslant 0$ mit $d\big(a_{j(0)}, a\big) > \varepsilon$. Nun seien $0 \leqslant j(0) < j(1) < \cdots < j(n)$ konstruiert, so dass

$$d\big(a_{j(k)}, a\big) > \varepsilon \quad \text{für alle } \ 0 \leqslant k \leqslant n \,.$$

Dann gibt es $j(n+1) \geqslant j(n)+1$ mit $d\big(a_{j(n+1)}, a\big) > \varepsilon$.
Nach Konstruktion ist $\big(a_{j(m)}\big)$ eine Teilfolge von (a_n), so dass

$$d\big(a_{j(m)}, a\big) > \varepsilon \quad \text{für alle } \ m \in \mathbb{N} \,.$$

Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\big(a_{j(i(k))}\big)$ von $\big(a_{j(m)}\big)$, die konvergiert. Da $\big(a_{j(i(k))}\big)$ eine konvergente Teilfolge von (a_n) ist, ist ihr Grenzwert a. Damit gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d\big(a_{j(i(k))}, a\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \ k \geqslant n_0 \,,$$

ein Widerspruch zur Konstruktion von $\big(a_{j(m)}\big)$. Damit ist $a_n \rightsquigarrow a$.

Lösung 9.1.
Eine Menge $K \subset M$ ist genau dann kompakt, wenn endlich. Denn offenbar ist diese Bedingung hinreichend. Andererseits konvergiert eine Folge in M nach Aufgabe 1 von Blatt 5 genau dann, wenn sie schließlich konstant wird. Sei also K unendlich ist. Es gibt eine Folge $a_n \in K$, so dass für alle $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $a_n \neq a_m$.
In der Tat: sei $a_0 \in K$ beliebig. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind bereits $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n$ gegeben, so dass $a_k \neq a_l$ für alle $k \neq l$, $k,l \leqslant n$, so gilt

$$\#\{a_0, \dots, a_n\} = n < \infty ,$$

also existiert $a_{n+1} \in K \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$. Damit ist eine solche Folge durch Induktion konstruiert.
Offenbar wird keine Teilfolge der Folge (a_n) schließlich konstant. Damit konvergiert keine Teilfolge von (a_n), so dass K dann nicht kompakt ist.
Eine Menge $C \subset M$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\#C \leqslant 1$, d.h. wenn C entweder leer oder einpunktig ist. Denn offenbar ist diese Bedingung hinreichend. Sei andererseits $\#C \geqslant 2$. Dann existiert $x \in C$ und $U_2 = C \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Da jede Teilmenge von M offen ist, sind $U_1 = \{x\}$ und U_2 und nicht leer, aber

$$C = U_1 \cup U_2 \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing ,$$

somit ist C dann nicht zusammenhängend.

Lösung 9.2.

(i) γ ist stetig. Zudem ist $[0,1]$ zusammenhängend. Denn seien $U_1, U_2 \subset [0,1]$ offen mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ und $U_1, U_2 \neq \varnothing$. Seien $a = \sup U_1$ und $b = \inf U_2$. Es gilt $a,b \in [0,1]$. Es gilt $a \leqslant b$ oder $a \geqslant b$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \leqslant b$. Dann gilt $b > 0$, sonst wäre $U_1 \subset \{0\}$. Ebenso folgt $b < 1$, sonst wäre $U_2 \subset \{1\}$. Für jedes $0 < \varepsilon < b$ gilt aber $b - \frac{\varepsilon}{2} < b$, also $b - \frac{\varepsilon}{2} \notin U_2$. Damit $\mathbb{R}_\varepsilon(b) \not\subset U_2$. Da U_2 offen ist, folgt damit $b \notin U_2$. Ebenso folgt $a \notin U_1$. Sei $a \leqslant x \leqslant b$. Dann ist $x \notin U_1 \cup U_2$, aber $x \in [0,1]$. Somit ist $[0,1] \neq U_1 \cup U_2$. Da U_1, U_2 beliebig waren, ist $[0,1]$ zusammenhängend. $\gamma([0,1])$ ist also auch zusammenhängend.

(ii) Seien $U_1, U_2 \subset M$ offen, $U_1, U_2 \neq \varnothing$ und $M = U_1 \cap U_2$. Seien $x_j \in U_j$, $j = 1,2$. Es gibt einen Weg γ in M mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$. Damit ist $x_j \in$

$\gamma([0,1]) \cap U_j \neq \varnothing$. Da $\gamma([0,1]) \subset U_1 \cup U_2$ und nach (i) zusammenhängend ist, folgt

$$\varnothing \neq \gamma([0,1]) \cap U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2 \ .$$

Da U_1 und U_2 beliebig waren, ist M zusammenhängend.

Lösung 9.3.

(i) Dies ist der offene zweite Quadrant, verschoben um $(-1,2)$. M ist zusammenhängend. Seien $(x,y),(u,v) \in M$. Definiere

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \ \gamma(t) = ((1-t)x + tu, (1-t)y + tv) \ .$$

γ ist stetig, und für alle $t \in [0,1]$ gilt $t,(1-t) \geqslant 0$, also

$$(1-t)x + tu < (1-t) + t = 1 \quad \text{und} \quad (1-t)y + tv > 2(1-t) + 2t = 2 \ .$$

Damit ist $\gamma(t) \in M$. Also ist γ ein Weg in M. Da $\gamma(0) = (x,y)$ und $\gamma(1) = (u,v)$, folgt, dass M wegzusammenhängend und nach Aufgabe 2 insbesondere zusammenhängend ist.

(ii) M ist die Vereinigung der offenen Kugeln $U_1 = \mathbb{R}^2_1((-1,0))$ und $U_2 = \mathbb{R}^2_1((1,0))$. Es gilt $U_1, U_2 \neq \varnothing$. Wäre $x \in U_1 \cap U_2$, so würde folgen:

$$2 > d(x,(-1,0)) + d(x,(1,0)) \geqslant d((-1,0),(1,0)) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2 \ ,$$

Widerspruch! Also ist $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ und M somit nicht zusammenhängend.

(iii) M ist zusammenhängend. Sei $U_1 = \mathbb{R}^2_1[(-1,0)]$ und $U_2 = \mathbb{R}^2_2[(1,0)]$. Seien $x,y \in U_1 \cup U_2$. Falls $x,y \in U_1$, so setze

$$\gamma(t) = (1-t)x + tx$$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist stetig und

$$\begin{aligned} d(\gamma(t),(-1,0)) &= \|(1-t)x + ty - (t + (1-t))(-1,0)\| \\ &\leqslant \|(1-t)x - (1-t)(-1,0)\| + \|ty - t(-1,0)\| \\ &= (1-t)\|x - (-1,0)\| + t\|y - (-1,0)\| \leqslant 1 - t + t = 1 \ . \end{aligned}$$

Damit ist $\gamma([0,1]) \subset U_1 \subset M$, γ also ein Weg in M mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Analog, falls $x,y \in U_2$.
Falls $x \in U_1$ und $y \in U_2$, sei

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)x & t \leqslant \frac{1}{2} \ , \\ (2t-1)y & t \geqslant \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist stetig, da die Einschränkungen auf $[0,\frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2},0]$ stetig sind. Da $0 \in U_1 \cap U_2$, sieht man wie oben, dass $\gamma([0,1]) \subset M$. Daher ist γ ein Weg in M mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Analog, wenn $y \in U_1$ und $x \in U_2$. Damit ist M wegzusammenhängend und nach Aufgabe 2 zusammenhängend.

(iv) M ist zusammenhängend. Denn seien $x, y \in M$. Es gibt $m, n \in \mathbb{N}$ und $r, s \in [0,1]$ mit $x = (r, nr)$ und $y = (s, ms)$. Setze

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)x & t \leqslant \frac{1}{2} \,, \\ (2t-1)y & t \geqslant \frac{1}{2} \,. \end{cases}$$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist stetig, da die Einschränkungen auf $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ stetig sind. Für alle $t \leqslant \frac{1}{2}$ gilt $1 \geqslant 1 - 2t \geqslant 0$ und

$$(1-2t)x = ((1-2t)r, n(1-2t)r) \in M \,.$$

Ebenso für alle $t \geqslant \frac{1}{2}$: $0 \leqslant 2t - 1 \leqslant 1$ und

$$(2t-1)y = ((2t-1)s, m(2t-1)s) \in M \,.$$

Nun gilt $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, also ist M wegzusammenhängend, also zusammenhängend.

Lösung 9.4.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Falls $d_Z((x_1, y_1), (x_2.y_2)) \leqslant \varepsilon$, folgt

$$\begin{aligned} d_X(\mathrm{pr}_X(x_1, y_1), \mathrm{pr}_X(x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) &\leqslant \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) \\ &= d_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

und analog für pr_Y.

(ii) Es gelte $(x_n, y_n) \rightsquigarrow (x, y)$. Da pr_X nach (i) insbesondere stetig ist, folgt $x_n = \mathrm{pr}_X((x_n, y_n)) \rightsquigarrow \mathrm{pr}_X(x, y) = x$ und analog für Y. Gelte umgekehrt $x_n \rightsquigarrow x$ und $y_n \rightsquigarrow y$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$d_X(x, x_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \; n \geqslant n_0 \,.$$

Es gibt ebenso $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$d_Y(y, y_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \; m \geqslant m_0 \,.$$

Dann folgt

$$d_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) \leqslant \varepsilon$$

für alle $n \geqslant \max(n_0, m_0)$. Somit gilt $(x_n, y_n) \rightsquigarrow (x, y)$.

(iii) Sei (x_n, y_n) eine Folge in Z. Da X kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{j(m)})$ von (x_n) und ein $x \in X$, so dass $x_{j(m)} \rightsquigarrow x$. Da Y kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(y_{j(i(p))})$ von $(y_{j(m)})$ und ein $y \in Y$, so dass $y_{j(i(p))} \rightsquigarrow y$. Es gilt $x_{j(i(p))} \rightsquigarrow x$ als Teilfolge einer konvergenten Folge. Nach (ii) folgt

$$(x_{j(i(p))}, y_{j(i(p))}) \rightsquigarrow (x, y) \,.$$

Dies ist eine konvergente Teilfolge von $((x_n, y_n))$. Da $((x_n, y_n))$ beliebig war, ist Z kompakt.

Lösung 10.1.

(i) Betrachte $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = f(x) - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. g ist stetig und

$$g(a) = f(a) - a \leqslant 0 \quad \text{sowie} \quad g(b) = f(b) - b \geqslant 0$$

nach Voraussetzung. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $x \in [a,b]$ mit $g(x) = 0$. Also $f(x) = g(x) + x = x$.

(ii) Sei $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = x - g(x)$. h ist stetig, und da $g(0), g(1) \in [0,1]$, gilt

$$h(0) = -g(0) \leqslant 0 \quad \text{sowie} \quad h(1) = 1 - g(1) \geqslant 0 \ .$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $x \in [0,1]$, so dass $h(x) = 0$, so dass $g(x) = x - h(x) = x$.

Lösung 10.2.

Für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, gilt

$$p(x) = x^{2n+1} \cdot \left(1 + \sum_{k=0}^{2n} a_k x^{k-1-2n}\right) = x^{2n+1} \cdot \left(1 + \sum_{k=-1-2n}^{-1} a_{k+1+2n} \cdot x^k\right) \ .$$

Mit

$$q(x) = 1 + \sum_{k=-1-2n}^{-1} a_{k+1+2n} \cdot x^k \quad \text{für alle } \ x \neq 0$$

gilt nach Archimedes

$$\lim_{m \to \infty} q(m) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{m \to \infty} q(-m) = 1 \ .$$

Sei $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $m_0 \geqslant 1$, so dass für alle $m \geqslant m_0$

$$|1 - q(m)| \leqslant 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad |1 - q(-m)| \leqslant \varepsilon \ .$$

Es folgt

$$q(m_0) \geqslant \varepsilon \quad \text{und} \quad q(-m_0) \geqslant 1 - \varepsilon \geqslant \varepsilon \ .$$

Also

$$p(-m_0) = -m_0^{2n+1} \cdot q(-m) \leqslant -\varepsilon < 0 < \varepsilon \leqslant m_0^{2n+1} \cdot q(m_0) = p(m_0) \ .$$

Da p stetig ist, gibt es nach Zwischenwertsatz $x \in]-m_0, m_0[\subset \mathbb{R}$, so dass $p(x) = 0$.

Lösung 10.3.

(i) Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $q_n : \mathbb{N} \to A_n$ ein surjektive Abbildung. Definiere
$$q(n) = q_{j-1}(m - j + 1) \quad \text{falls} \quad n = \frac{m(m+1)}{2} + j \ , \ 0 \leqslant j \leqslant m \in \mathbb{N} \ .$$
Dies ist wohldefiniert, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$ und genau ein $0 \leqslant j \leqslant m$, so dass
$$n = n_{m,j} = \frac{m(m+1)}{2} + j \ .$$
In der Tat: Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Archimedes gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$, so dass
$$\frac{m(m+1)}{2} \leqslant n < \frac{(m+1)(m+2)}{2} \ ,$$
also kann man $j = n - \frac{m(m+1)}{2}$ wählen. Es gilt weiterhin
$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = m + 1 \ ,$$
so dass die Darstellung eindeutig ist.
q ist surjektiv. Denn sei $a \in A$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $a \in A_k$. Da q_k surjektiv ist, gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $q_k(l) = a$. Also folgt
$$q\big(n_{k+l,k+1}\big) = q_k(k + l - (k+1) + 1) = q_k(l) = a \ .$$
Somit ist q surjektiv und A abzählbar.

(ii) Wäre A abzählbar, so wäre
$$A \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q}) = [0,1]$$
abzählbar, ein Widerspruch!

Lösung 10.4.

Angenommen, $2^{\mathbb{N}}$ sei abzählbar. Sei $q : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ eine Abbildung. Definiere $\varphi \in 2^{\mathbb{N}}$ durch
$$\varphi(n) = 1 - q(n)(n) \quad \text{für alle} \ \ n \in \mathbb{N} \ .$$
Gäbe es $m \in \mathbb{N}$ mit $q(m) = \varphi$, so würde also
$$\varphi(m) = 1 - q(m)(m) = 1 - \varphi(m)$$
gelten, ein Widerspruch! Also gibt es kein solches m und q ist nicht surjektiv. Damit ist $2^{\mathbb{N}}$ überabzählbar.

Lösung 11.1.
Für $h > 0$ gilt
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = h^{-\frac{2}{3}}$$
Sei $R > 0$ beliebig. Dann ist $h := R^{-\frac{3}{2}} > 0$ und für alle $0 < h' \leqslant h$ gilt
$$\frac{f(0+h')-f(0)'}{h} = h'^{-\frac{2}{3}} \geqslant h^{-\frac{2}{3}} \geqslant R\ .$$
Damit konvergiert der Differenzialquotient für $h \to 0$ nicht und f ist nicht in 0 differenzierbar.
Andererseits gilt für
$$g : [0,\infty[\to [0,\infty[: x \mapsto x^3\ ,$$
dass g stetig ist. Außerdem $f(g(x)) = x = g(f(x))$ für alle $x \in [0,\infty[$. Damit ist g bijektiv mit $g^{-1} = f$. Da g stetig, injektiv und auf einem Intervall definiert ist, ist $f = g^{-1}$ stetig, und die Behauptung ist bewiesen.

Lösung 11.2.
f ist als Polynomfunktion differenzierbar mit
$$f'(x) = -3x^2 - 12x + 36 = -3(x^2+4x-12) = -3\big((x+2)^2-16\big)\ .$$
Daher gilt $f'(x)$ genau dann, wenn $x = 2$ oder $x = -6$. Da der Leitkoeffizient von f' $-3 < 0$ ist, folgt
$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in [-10,-6[\cup]2,5] \text{ und } f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in]-6,2[\ .$$
Auf den entsprechenden Mengen ist f also streng antiton bzw. streng isoton. Also ist
$$\max f([-10,5]) = \max(f(-10), f(2)) = \max(57,57) = 57$$
und
$$\min f([-10,5]) = \min(f(-2), f(5)) = \min(-71,-78) = -78\ .$$
Da f stetig ist, ist $f([-10,5])$ ein Intervall nach dem Zwischenwertsatz. Da $[-10,5]$ kompakt ist als abgeschlossenes und beschränktes Intervall (Satz von Bolzano-Weierstrass) und f stetig ist, ist $f([-10,5]) \subset \mathbb{R}$ kompakt, insbesondere abgeschlossen und beschränkt. Es folgt
$$f([-10,5]) = [\min f([-10,5]), \max f([-10,5])] = [-78,57]\ .$$

Lösung 11.3.
f ist als Polynomfunktion differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4x^2 - 20x - 12 = 4(x^3 - x^2 - 5x - 3) \\ &= 4(x-3)(x^2+2x+1) = 4(x-3)(x+1)^2 \ . \end{aligned}$$

Daher ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -1$ oder $x = 3$. Da $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \pm\infty$, folgt

$$f'(x) < 0 \quad \text{für alle } \ x < -1$$

und

$$f'(x) > 0 \quad \text{für alle } \ x > 3 \ .$$

Es gilt $f'(0) = -12 < 0$, also gilt

$$f'(x) < 0 \quad \text{für alle } \ -1 < x < 3 \ .$$

Denn wäre $f'(x) \geqslant 0$ für ein $-1 < x < 3$, so gäbe es $y \in]-1,3[$ mit $f'(y) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz, ein Widerspruch zu dem obigen. Damit ist f streng wachsend auf $[3,\infty[$ und streng fallend auf $]-\infty,3]$.

Lösung 11.4.
Sei zunächst f in o differenzierbar. Dann existiert

$$\lim_{o\neq x\to o} g(x) = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{f(o+h)-f(o)}{h} = f'(o) \ .$$

Definiere für alle $x \in U$

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} f'(o) & x = o \ , \\ g(x) & x \neq o \ . \end{cases}$$

Dann gilt $\hat{g}\big|_{U\setminus\{o\}} = g$. Sei $x_k \in U$ eine Folge mit $x_k \rightsquigarrow o$. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_k \neq o$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \hat{g}(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = f'(o) = g(o)$$

nach dem obigen. Da (x_k) beliebig war, ist $\hat{g}$ in o stetig. Offenbar ist $\hat{g}$ auch in allen Punkten außer o stetig. Also ist $\hat{g}$ eine stetige Fortsetzung von g.
Umgekehrt sei $\hat{g}$ eine stetige Fortsetzung von g. Dann existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(o+h)-f(o)}{h} = \lim_{o\neq x\to o} g(x) = \lim_{o\neq x\to o} \hat{g}(x) = \hat{g}(o) \ .$$

f ist nach Definition der Differenzierbarkeit also in o differenzierbar mit $f'(o) = \hat{g}(o)$.

Lösung 12.1.

(i) Seien $a, b \in I$, $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $a < \xi < b$ mit
$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) > 0 ,$$
so dass $f(a) < f(b)$. Da a und b beliebig waren, ist f streng monoton wachsend.
Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$
zeigt, denn $f'(0) = 0$, obwohl f streng monoton wachsend ist.

(ii) Seien $a, b \in I$, $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $a < \xi < b$ mit
$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \leqslant 0 ,$$
so dass $f(b) \leqslant f(a)$. Da a und b beliebig warem, ist f monoton fallend.
Hier ist auch die Umkehrung richtig. Denn sei f monoton fallend und $o \in I$. Es gilt
$$f'(o) = \lim_{0<h\to 0} \frac{f(o+h) - f(o)}{h} \leqslant 0 ,$$
da $f(o+h) \leqslant f(o)$ für alle $h > 0$. Da o beliebig war, folgt die Behauptung.

Lösung 12.2.

Weil $\lim_{a<y\to a} \frac{1}{y-a} = \infty$, gibt es $\varepsilon > 0$ mit
$$\frac{1}{y-a} > a \quad \text{für alle } \ 0 < y - a \leqslant \varepsilon .$$
Definiere die Funktionen $h, i : [a, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ durch
$$h(y) := f\left(\frac{1}{y-a}\right) \quad i(y) := g\left(\frac{1}{y-a}\right)$$
für alle $y \in]a, a+\varepsilon]$ und $h(a) = i(a) = 0$. Dann sind h, i wegen der Bedingung (i) in a stetig und nach Kettenregel in $]a, a+\varepsilon[$ differenzierbar mit
$$h'(y) = -\frac{f'\left(\frac{1}{y-a}\right)}{(y-a)^2} \ , \ i'(y) = -\frac{g'\left(\frac{1}{y-a}\right)}{(y-a)^2}$$

für alle $y \in]a, a+\varepsilon[$. Insbesondere gilt $i'(y) \neq 0$ für $y \in]a, a+\varepsilon[$, da dann $\frac{1}{y-a} > a$ und man die Bedingung (iii) anwenden kann.
Sei $(y_k) \subset]a, a+\varepsilon[$ eine Folge mit $y_k \rightsquigarrow a$. Setze $x_k = \frac{1}{y_k - a} \in]a, \infty[$. Es gilt $x_k \rightsquigarrow \infty$, also

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h'(y_k)}{i'(y_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f'(x_k)}{g'(x_k)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Da (y_k) beliebig war, existiert

$$\lim_{a<y\to a} \frac{h'(y)}{i'(y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Nach dem Satz von de l'Hospital folgt

$$\lim_{a<y\to a} \frac{h(y)}{i(y)} = \lim_{a<y\to a} \frac{h'(y)}{i'(y)} .$$

Sei nun $x_k \rightsquigarrow \infty$. Für hinreichend großes k gilt $x_k > \max(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$, also $y_k = a + \frac{1}{x_k} \in]a, a+\varepsilon[$. Weiter $y_k \rightsquigarrow a$. Also

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{h(y_k)}{i(y_k)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Da die rechte Seite unabhängig von (x_k) ist und (x_k) beliebig war, folgt die Behauptung.

Lösung 12.3.
Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \geqslant 0 , \\ -\frac{x^2}{2} & x \leqslant 0 . \end{cases}$$

Offenbar ist f in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(x) = |x|$ für alle $x \neq 0$. Weiter gilt

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \begin{cases} \frac{y}{2} & y > 0 \\ -\frac{y}{2} & y < 0 \end{cases} \to 0 \quad \text{für } y \to 0 .$$

Also ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Damit f differenzierbar mit $f' = |\cdot|$.
f' ist aber nicht in 0 differenzierbar, denn obwohl $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ist, gilt

$$\frac{f'\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - f'(0)}{\frac{(-1)^n}{n} - 0} = (-1)^n ,$$

so dass diese Folge nicht konvergiert. Der Differentialquotient besitzt in 0 also keinen Grenzwert, so dass f nicht zweimal differenzierbar ist.

Lösung 12.4.

(i) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} \cdot x^{k-n} & n \leqslant k\ , \\ 0 & n > k\ . \end{cases}$$

Denn $f^{(0)}(x) = x^k$ und falls $n \geqslant 0$, so dass die Formel für dieses n gelte, folgt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} = (k-n)\cdot\frac{k!}{(k-n)\cdot(k-n-1)!}\cdot x^{k-n-1} \\ &= \frac{k!}{(k-(n+1))!}\cdot x^{k-(n+1)} \end{aligned}$$

falls $n+1 \leqslant k$. Falls $n+1 > k$, ist $f^{(n)}$ konstant, also $f^{(n+1)} = 0$. Damit ist die Formel bewiesen.
Das n-te Taylorpolynom um 0 ist also

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\cdot(x-0)^j = \begin{cases} 0 & n < k\ , \\ x^k & n \geqslant k\ . \end{cases}$$

(ii) Mit der Formel aus (i) ist das n-te Taylorpolynom um 1

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}\cdot(x-1)^j = \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{k!}{j!\cdot(k-j)!}\cdot(x-1)^j = x^k - \sum_{j=\min(n,k)+1}^{k} \binom{k}{j}\cdot(x-1)^j\ .$$

(iii) Es gilt für alle $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot n!\cdot\frac{1}{x^{n+1}}\ .$$

Denn es gilt $f^{(0)}(x) = \frac{1}{x}$ und falls $n \geqslant 0$, so dass die Formel für n gilt, folgt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{1}{x^{n+1}} \\ &= (-1)^n\cdot n!\cdot(-n-1)\cdot\frac{1}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot\frac{1}{x^{n+2}}\ , \end{aligned}$$

also ist die Formel bewiesen. Da n-te Taylorpolynom um -1 ist also

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!}\cdot(x+1)^j = -\sum_{j=0}^{n}(x+1)^j = \frac{1-(x+1)^{n+1}}{x}\ ,$$

wobei die letzte Gleichung nur für $x \neq 0$ gilt.

Lösung 13.1.

(i) Für alle $n \geqslant 1$ gilt

$$n^3 + n^2 \geqslant n^3 + 1 \ ,$$

also $\frac{n^2}{n^3+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. Damit folgt für alle $k \geqslant 1$

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{n^2}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n^2}{n^3+1} \geqslant \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1} \ .$$

Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ also konvergieren würde, würde nach dem Majorantenkriterium auch die harmonische Reihe konvergieren, Widerspruch! Also divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

(ii) Sei $a_n = \frac{n!}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{-2} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} < 1 \ ,$$

da die Folge $\left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]_{n \geqslant 1}$ nach Vorlesung streng isoton ist (Bernoulli-Ungleichung). Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also absolut.

(iii) Mit der geometrischen Reihe folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2^{-n} - \left(\frac{-3}{4} \right)^{n+2} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{9}{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{4} \right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}}$$
$$= 2 - \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{7} = 2 - \frac{9}{28} = \frac{47}{28} = \frac{47}{2^2 \cdot 7} \ .$$

Lösung 13.2.

(i) Falls $|x| \geqslant \frac{1}{3}$, ist für alle $n \geqslant 2$

$$|a_n| = \frac{n}{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot |x|^n \geqslant \frac{2}{2+1} \cdot 3 = 2 \ ,$$

also (a_n) keine Nullfolge. Somit divergiert die Reihe in diesem Fall. Sei also $0 < |x| < \frac{1}{3}$ und setze

$$\delta := 3\,|x| \in]0,1[\quad \text{und} \quad \varepsilon := \frac{1}{\delta} - 1 > 0 \, .$$

Da $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n(n+2)} = 1$ und diese Folge fallend ist, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n(n+2)} = \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

also $1 + \frac{1}{n(n+2)} \leqslant \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{2}$ für alle $n \geqslant n_0$. Dann folgt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+2} \cdot |x|^{n+1}}{n \cdot (n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot |x|^n} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \cdot 3\,|x| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} < 1 \, .$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium und das Konvergenzintervall ist $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$.

(ii) Sei $|x| > 0$ und $a_n = \frac{x^n}{n^n}$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geqslant |x|$. Dann gilt für alle $n \geqslant n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x| \cdot |x|^n \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n \cdot |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{|x|}{n_0 + 1} < 1 \, .$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut. Das Konvergenzintervall ist somit $\mathbb{R}$.

(iii) Für $|x| > 1$ sei $\varepsilon = |x| - 1 > 0$. Mit der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \cdot x^{2n+1} \right| = \frac{1}{n} \cdot (1+\varepsilon)^{2n+1} \geqslant \frac{1}{n} \cdot (1 + (2n+1) \cdot \varepsilon) > 2\varepsilon > 0 \, ,$$

so dass (a_n) keine Nullfolge ist und die Reihe divergiert. Sei also $0 < |x| < 1$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n \cdot |x|^{2n+3}}{(n+1) \cdot |x|^{2n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot |x|^3 \leqslant |x|^3 < 1 \, ,$$

so dass die Reihe mit dem Quotientenkriterium absolut konvergiert. Das Konvergenzintervall ist somit $]-1, 1[$.

Lösung 13.3.

Die Folge $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ist streng monoton fallend. In der Tat, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(2\sqrt{n+1}\right)^2 = 4n+4 = 2n+2+2(n+1) > 2n+2+2\sqrt{n(n+2)} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)^2 ,$$

weil $\left(\sqrt{n(n+2)}\right)^2 = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Also folgt

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \, .$$

Offenbar ist die Folge durch 0 von unten beschränkt. Es folgt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\ .$$

Denn sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$. Für alle $n \geqslant n_0$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \leqslant \varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt tatsächlich $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.
Da die Folge fallend ist, gilt zudem

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{1}-\sqrt{0} = 1\ .$$

Lösung 13.4.
Sei $\left(x_{j(m)}\right)$ eine konvergente Teilfolge von (x_n). Sei $k \in \mathbb{N}$. Für alle $m \geqslant k$ gilt

$$x_m \leqslant \sup\nolimits_{n\geqslant k} x_n\ .$$

Da $j(k) \geqslant k$, gilt insbesondere $x_{j(k)} \leqslant \sup_{n\geqslant k} x_n$. Da (x_n) beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ mit $-M \leqslant x_n \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da M also eine obere Schranke ist, folgt für die kleinste obere Schranke

$$\sup\nolimits_{n\geqslant k} x_n \leqslant M\ .$$

Außerdem ist $-x_{j(k)} \leqslant M$, so dass

$$\sup\nolimits_{n\leqslant k} x_n - x_{j(k)} \in [0, 2M]\ .$$

Da k beliebig war und die Folge $(\sup_{n\leqslant k} x_n)_k$ konvergiert, weil sie fallend und beschränkt ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n - \lim_{m\to\infty} x_{j(m)} = \lim_{k\to\infty}\left(\sup\nolimits_{n\geqslant k} x_n - x_{j(k)}\right) \in [0, 2M]\ .$$

Insbesondere folgt die Ungleichung.

Lösung 13.5.
Betrachte die Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) = f(x) - f(c) \quad \text{und} \quad h(x) = x - c$$

für alle $x \in [a,b]$. Sie sind stetig und in $]a,b[\setminus\{c\}$ differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{x\to c} g(x) = f(c) - f(c) = 0 = c - c = \lim_{x\to c} h(x)\ .$$

Schließlich ist $h(x) \neq 0$ für alle $x \neq c$ und

$$h'(x) = 1 \neq c \quad \text{für alle}\ \ x \neq c\ .$$

Außerdem existiert

$$\lim_{c\neq x\to c}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{c\neq x\to c}f'(x)$$

nach Voraussetzung. Somit kann man die Regel von de l'Hospital anwenden: Man hat Existenz und Gleichheit von

$$\lim_{c\neq x\to x}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{c\neq x\to c}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{c\neq x\to c}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{c\neq x\to c}f'(x)\ .$$

Nach Definition ist f somit in c differenzierbar mit

$$f'(c)=\lim_{c\neq x\to c}f'(x)\ .$$