Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Harald Upmeier

Mathematik III

Wintersemester 2002/2003

Skript
Matthias Graefenhan

Inhaltsverzeichnis

Dies ist das Skript zur Vorlesung Mathematik III von Prof. Dr. H. Upmeier im WS 2002/2003 an der Philipps-Universität Marburg. Thema der Vorlesung ist die Analysis II für Informatiker. Für Vollständigkeit und Richtigkeit der Mitschrift übernehme ich keinerlei Verantwortung. Sie ist zum beidseitigen Druck formatiert. Hinweise, zum Beispiel zu eventuellen Fehlern, bitte an graef@mathematik.uni-marburg.de

Vielen Dank an Natalia, Lars und Christoph für ihre Mitschriften.

Matthias Graefenhan

Kapitel 1

Funktionenräume

1.1 Normierte Räume und Banachräume

Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vollständiger, total geordneter Körper, archimedisch
Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen, vollständiger Körper

Sei E $\mathbb{R}$-Vektorraum ($\mathbb{R}$-VR), $E \ni$ u, v, w

$$\begin{array}{lcl} E \times E & \xrightarrow{+} & E \\ u, v & \longmapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times E & \xrightarrow{\cdot} & E \\ \alpha, v & \longmapsto & \alpha v \end{array} \quad \text{(„}\alpha\text{-Vielfaches“ von } v\text{)}$$

__Vektor-Axiome__
Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $u, v \in E$ gilt (neben $(E, +)$ abelsche Gruppe)

(i) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

(ii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

(iii) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

(iv) $1v = v$

__Definition__

Norm auf $\mathbb{R}$-VR $E : E \xrightarrow{||\cdot||} \mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$
$v \longmapsto ||v|| \qquad (||v|| = \text{Norm/Länge von } v)$

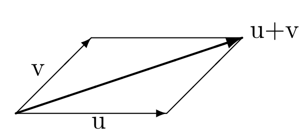
Folgende **Axiome** müssen gelten:

(i) $||v|| \geq 0$

(ii) $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(iii) $||\alpha v|| = |\alpha|_{\mathbb{R}} \cdot ||v||_E$ „Homogenität“

(iv) $||u + v||_E \leq ||u||_E + ||v||_E$ „Dreiecksungleichung“



Einheitskugel

$(E, ||\cdot||)$ normierter Raum, $r > 0$ „Radius“

$E_r[0] = \{v \in E \mid ||v|| \leq r\}$ abgeschlossene r-Kugel
$E_r(0) = \{v \in E \mid ||v|| < r\}$ offene r-Kugel
Für $r = 1$: $E_1[0], E_1(0)$ abgeschlossene / offene Einheitskugel

Proposition: $E_r(0) = r \cdot E_1(0) = \{rv \mid v \in E_1(0)\}$

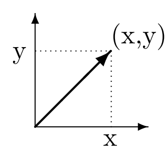
Beweis: Benutze Axiom 3 (Homogenität) □

Beispiel

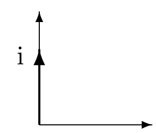
$E = \mathbb{R},\ dim\ E = 1, \alpha \in E = \mathbb{R}$, so gibt es nur eine eindeutige Norm $|\alpha|$
$\mathbb{R}_1[0] = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid |\alpha| \leq 1\} = [-1, 1]$
$\mathbb{R}_r(0) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid |\alpha| < r\} = (-r, r)$

Beispiel

$E = \mathbb{R}^2,\ v = (x, y) = (v_x, v_y) = (v_1, v_2)$
$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$



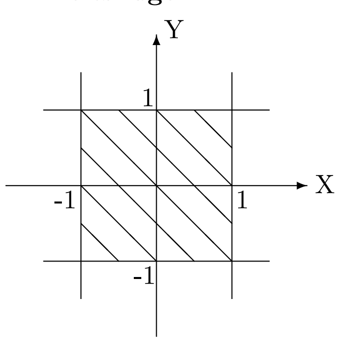
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C},\ (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi = x + iy$
$i = (0, 1)$



Verschiedene Normen auf $E = \mathbb{R}^2$

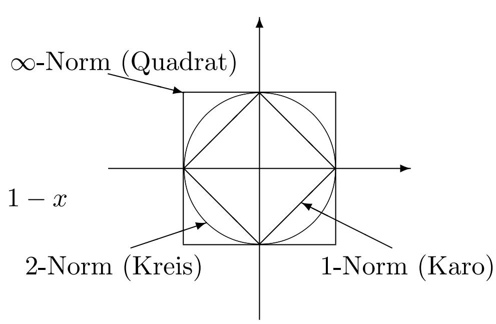
Maximums-Norm $||(x, y)||_\infty = max(|x|, |y|)$
1-Norm $||(x, y)||_1 = |x| + |y|$
2-Norm (Euklid) $||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$
p-Norm $||(x, y)||_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p} = [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$

Einheitskugeln



$||(x, y)||_\infty = max(|x|, |y|) \leq 1 \iff |x| \leq 1$ und $|y| \leq 1$
$\mathbb{R}^2_1[0] = \{(x, y) \mid |x| \leq 1\} \cap \{(x, y) \mid |y| \leq 1\}$

1-Norm (Karo) $||(x, y)||_1 = |x| + |y|$
Œ: $0 \leq x, 0 \leq y$ Einheitskugel: $x + y \leq 1$
„Rand“ der Einheitskugel: $x + y = 1 \iff y = 1 - x$



Definition

Einheitssphäre:

$$\delta E_1[0] = \{v \in E \mid ||v|| = 1\} = E_1[0] \ \setminus \ E_1]0[= \{v \in E_1[0] \mid v \notin E_1(0)\}$$

Die Elemente heißen Einheitsvektoren.

$(E, ||\cdot||)$ normierter Raum, $d: \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$d(x,y) = ||x-y||$ Metrik auf E

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\Longrightarrow (E,d)$ metrischer Raum

Sei (v_n) Folge in E, d.h. $\begin{array}{rl} \mathbb{N} & \longrightarrow E \\ 0 \leq n & \longmapsto v_n \end{array}$

Definition

(i) (v_n) Cauchy $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, p,q \geq n_0 : ||v_p - v_q|| \leq \varepsilon$

(ii) $v_n \rightsquigarrow v$ konvergente Folge $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, n \geq n_0 : ||v_n - v|| \leq \varepsilon$
$\left[v = \lim_{n\to\infty} v_n =: v_\infty\right]$

Es gilt (in jedem metrischen Raum)

$$(v_n) \text{ konvergente Folge} \Longrightarrow (v_n) \text{ Cauchy-Folge}$$

Definition

$$(E, ||\cdot||) \text{ vollständig} \Longleftrightarrow \text{jede Cauchy-Folge ist konvergent}$$

$$(E, ||\cdot||) \text{ Banachraum} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{(i) normiert} \\ \text{(ii) vollständig} \end{array}$$

Beispiel: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ Banachraum (1-dimensional)

Beweis: $\begin{array}{rl} |\cdot| : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto |x| \end{array}$ Norm, Bolzano-Weierstrass: $\mathbb{R}$ vollständig $\square$

Proposition: $(E_1, ||\cdot||_1)$ und $(E_2, ||\cdot||_2)$ normierte Räume

$\Longrightarrow E = E_1 \times E_2 \ni (v_1, v_2)$ mit $v_1 \in E_1, \ v_2 \in E_2$ versehen mit der Norm
$||(v_1, v_2)|| := max(||v_1||_1, ||v_2||_2)$

Falls $E_1, \ E_2$ vollständig $\Longrightarrow E$ vollständig.

Beispiel: $E_1 = (\mathbb{R}, |\cdot|) = E_2 \Longrightarrow E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ Banachraum bezüglich $||x,y||_\infty = max(|x|, |y|)$

Bemerkung: Allgemeiner gilt

$$(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_p) \text{ Banachraum, } ||(x,y)||_p := \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p} = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Beispiel: $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ Banachraum, n-dimensional
$$||(x_1, x_2, ..., x_n)||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition: E Banachraum (bezüglich Norm $||\cdot||$)
Sei $F \subset E$ Untervektorraum
Falls F abgeschlossen $\Longrightarrow$ F Banachraum (nämlich vollständig)

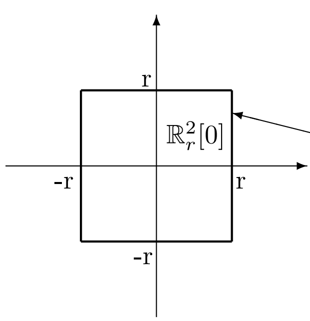
Beweis
Untervektorraum: $u, v \in F \Longrightarrow u + v \in F,\ \alpha u \in F\ (\alpha \in \mathbb{R}),\ 0 \in F$
$F \overset{abg.}{\sqsubset} E :\Longleftrightarrow$ Jede Folge $F \ni v_n \rightsquigarrow v \in E \Longrightarrow v \in F$
Sei $F \overset{abg.}{\sqsubset} E$, E Banachraum, z.z. F Banachraum
Sei $F \ni v_n$ Cauchy-Folge $\Longrightarrow v_n \in E$ Cauchy-Folge $\Longrightarrow$ da E vollständig:
$\exists\, v \in E,\ v_n \rightsquigarrow v$, d.h. $\exists\, v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n \in E \overset{\text{Fabg.inE}}{\Longrightarrow} v \in F,\ v_n \rightsquigarrow v$ in F $\square$

Proposition
Sei E Banachraum, $r > 0$ (z.B. $r = 1$)

$\Longrightarrow$ abg. r-Kugel $E_r[0] = \{v \in E \mid ||v|| \leq r\}$ ist vollständig (als Menge)
r-Sphäre $E_r[0] \setminus E_r(0) = \{v \in E \mid ||v|| = r\}$ ist vollständig (als Menge)

Beweis: $E_r[0] \overset{abg.}{\subset} E \overset{abg.}{\supset} E_r[0] \setminus E_r(0)$, nach Voraussetzung E vollständig
$\Longrightarrow$ $E_r[0]$ vollständig, $E_r[0] \setminus E_r(0)$ vollständig $\square$

Beispiel: $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ vollständig



Sphäre von Radius r ist auch vollständig.
(Folgenkonvergenz im Rand)

1.2 Funktionenräume

Sei X Menge (z.B. $X = n$, $X = \mathbb{N}$, $X = [a, b]$, $X = \mathbb{R}$ ...)

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Funktion}\\ x \longmapsto f(x) \end{array}\} = \mathbb{R}^X$$

Proposition

$\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ist Vektorraum (im allgemeinen ∞-dimensional) bezüglich der

punktweisen Addition $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
punktweisen Skalarmultiplikation: $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

Beweis: z.z. $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$

Funktion f ist eindeutig durch Werte $f(x)(x \in X)$ bestimmt.
Sei $x \in X$ beliebig aber fest:

$$[(f_1 + f_2) + f_3](x) = (f_1 + f_2)(x) + f_3(x) = [f_1(x) + f_2(x)] + f_3(x) =$$

$$\underbrace{=}_{(\mathbb{R},+)\text{ assoz.}} f_1(x) + [f_2(x) + f_3(x)] = f_1(x) + (f_2 + f_3)(x) = (f_1 + (f_2 + f_3))(x)$$

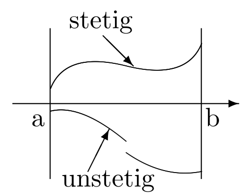
Da x beliebig war $\Longrightarrow (f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$ □

Beispiel:

$$X = n = \{0, 1, ..., n-1\},\ \mathcal{F}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n = \text{VR aller n-tupel } (x_1, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$$

Beispiel: $X = \mathbb{N},\ \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =$ Vektorraum aller Folgen
$(x_0, x_1, x_2, ...),\ x_i \in \mathbb{R}$
$(x_0, x_1, x_2, ...) + (y_0, y_1, y_2, ...) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$

Beispiel: $X = [a, b],\ \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$



Definition

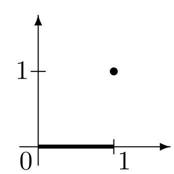
Sei $f_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ Funktionenfolge, $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$,
$f_n \rightsquigarrow f$ **punktweise Konvergenz** $:\Longleftrightarrow \forall x \in X : f_n(x) \rightsquigarrow f(x)$
($f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ punktweise)

Äquivalente Definition

$$f_n \rightsquigarrow f :\Longleftrightarrow \forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(x)\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Beispiel:

$X = [0, 1],\ f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n\ (1 \leq n)$
f_n konvergiert punktweise auf $[0, 1]$ gegen $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
wobei $f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 1 \\ 1 & : \quad x = 1 \end{cases}$
f unstetig in $x = 1$



Beispiel:

$X = \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$ Funktionenfolge; f_n nicht punktweise konvergent, genauer gilt:

$x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1] \quad \Longrightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, nämlich
$x > 1 \Longrightarrow f_n(x) \quad \longrightarrow \infty$, wächst unbeschränkt
$x \leq -1 \Longrightarrow f_n(x)$ alternierend

1.3 Räume beschränkter Funktionen

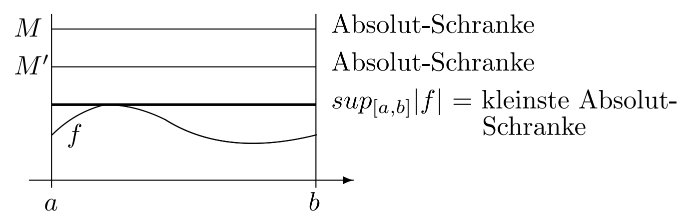
Definition X Menge (ohne Metrik)

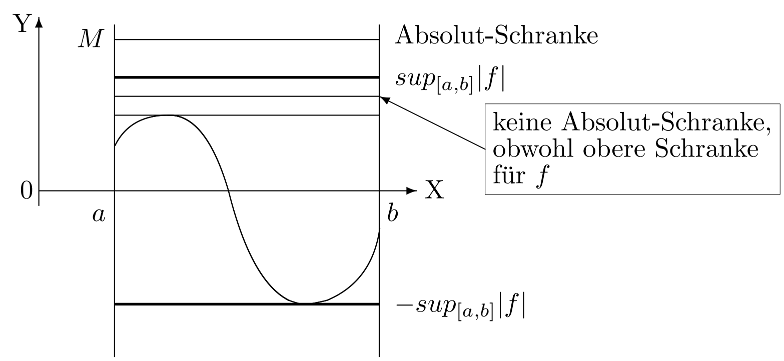
$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt } \Longleftrightarrow \exists\ M > 0\ \forall x \in X : |f(x)| \leq M$$

M ist eine obere Schranke der Menge $\{|f(x)| : x \in X\}$ „Absolut-Schranke“

kleinste Absolut-Schranke $=: sup_{x \in X}|f| = sup_X|f| = ||f||_\infty$ – Supremumsnorm

Beispiele:

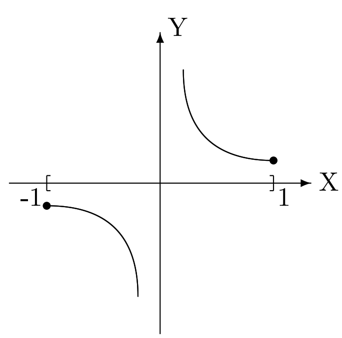




Bemerkung:

$sup_X|f|$ = kleinste Absolut-Schranke, erfüllt $-sup_X|f| \leq f(x) \leq sup_X|f| \; \forall x \in X$

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & : \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

unbeschränkt

Satz

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\} \text{ ist ein Banachraum}$$

(unendlicher Dimension falls nicht endlich)

Beweis

z.z.

(i) $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ Vektorraum

(ii) $||\cdot||_\infty$ Norm auf $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$

(iii) normierter Raum $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ vollständig

ad(i)

$$f_1, f_2 \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists\, M_1, M_2 > 0\ \forall x \in X : |f_1(x)| \leq M_1\ ,\ |f_2(x)| \leq M_2$$

$$\Longrightarrow f_1 + f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ punktweise}$$

$$|(f_1+f_2)(x)| \underbrace{=}_{\text{Definition von } f_1+f_2} |f_1(x) + f_2(x)| \underbrace{\leq}_{\Delta-\text{Ungleichung für } |\cdot|} |f_1(x)| + |f_2(x)| \leq M_1 + M_2 =: M$$

$\Longrightarrow M := M_1 + M_2$ Absolut-Schranke von $f_1 + f_2$
$\Longrightarrow f_1 + f_2$ beschränkt, analog αf_1 beschränkt
$\Longrightarrow \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ Untervektorraum

ad(ii) z.z. $||f_1 + f_2||_\infty \leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$ (Δ-Ungleichung für $||\cdot||_\infty$)

Setze $M_1 = ||f_1||_\infty,\ M_2 = ||f_2||_\infty$

$\Longrightarrow M_1$ Absolut-Schranke von f_1 (sogar die kleinste)
M_2 Absolut-Schranke von f_2 (sogar die kleinste)
$\overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} M_1 + M_2$ Absolut-Schranke von $f_1 + f_2$ (nicht notwendig die kleinste)
$\Longrightarrow ||f_1 + f_2||_\infty =$ kleinste Absolut-Schranke von $f_1 + f_2 \leq M_1 + M_2 =$
$= ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$
$\Longrightarrow ||f_1 + f_2||_\infty \leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$

ad(iii)

Sei $f_n \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ Cauchy-Folge bezüglich $||\cdot||_\infty$,
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, p, q \geq n_0 : ||f_p - f_q||_\infty \leq \varepsilon$
$sup_{x\in X} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \forall\, x \in X : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

Sei $x \in X$ fest

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, p, q \geq n_0 : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$
$\Longrightarrow f_n(x) \in \mathbb{R}$ Cauchy-Folge (angewandt an festem Punkt x)
$\underbrace{\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty}}_{\mathbb{R} \text{ vollständig}} f_n(x) =: f_\infty(x) \in \mathbb{R},\ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>bisher bekannt:</u> f_n beschränkt, $||f_p - f_q||_\infty \leq \varepsilon\ \forall\, p, q \geq n_0$,
$f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \quad f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

z.z.

(i) f beschränkt

(ii) $||f_\infty - f_n||_\infty \longrightarrow 0$, $d(f_n, f_\infty) \longrightarrow 0$

(ii) Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, n_0\ \forall\, p, q \geq n_0\ \forall\, x \in X : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Sei $x \in X \Longrightarrow f_n(x) \rightsquigarrow f_\infty(x)$
$\Longrightarrow \exists\, q = q(x) = |f_\infty(x) - f_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, q \geq q(x)$
$\Longrightarrow |f_\infty(x) - f_p(x)| \leq \underbrace{|f_\infty(x) - f_q(x)|}_{\rightsquigarrow 0,\ q \longrightarrow \infty} + \underbrace{|f_q(x) - f_p(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$
$\Longrightarrow |f_\infty(x) - f_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Da x beliebig: $sup_{x\in X} |f_\infty(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\ \forall\, p \geq n_0$
$\Longrightarrow ||f_\infty - f_p||_\infty \leq \varepsilon\ \forall\, p \geq n_0$
$\Longrightarrow f_p \rightsquigarrow f_\infty$ bezüglich $||\cdot||_\infty$

(i) f_∞ beschränkt

setze: $\varepsilon = 1 \Longrightarrow \exists\, n_1\ \forall\, p \geq n_1 : ||f_\infty - f_p||_\infty \leq 1$

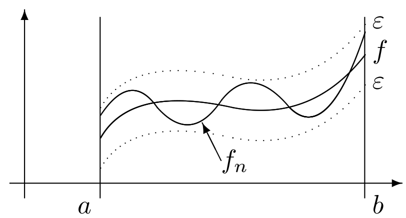
$||f_\infty - f_{n_1}|| \leq 1 \Longrightarrow f_\infty - f_{n_1}$ beschränkt
$f_\infty - f_{n_1}$ beschränkt, f_{n_1} beschränkt $\overset{(i)}{\Longrightarrow} f_\infty = (f_\infty - f_{n_1}) + f_{n_1}$ beschränkt

$\Longrightarrow$ **(i)** $f_\infty \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$
(ii) $f_n \rightsquigarrow f_\infty$ in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$
$\Longrightarrow$ vollständig $\square$

Definition

$f_n \rightrightarrows f$ **gleichmäßige Konvergenz**
$\Longleftrightarrow \quad ||f_n - f||_\infty \longrightarrow 0$
$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0\, \forall\, x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz

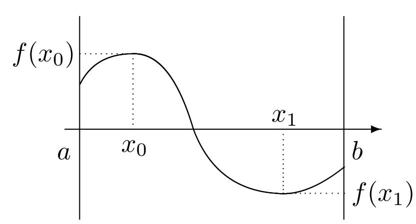


1.4 Räume stetiger Funktionen

(X, d) metrischer Raum, kompakt
$X \subset \mathbb{R}$ kompakt $\Longleftrightarrow X$ beschränkt und abgeschlossen

Extremwertsatz (Stetige Funktionen nehmen Extremwerte an)

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$
$$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in X,\ x_1 \in X \text{ so dass } f(x_0) = max_{x \in X}\, f(x);\ f(x_1) = min_{x \in X}\, f(x)$$



<u>Korollar</u>

$$X \text{ kompakt, } f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Longrightarrow$$
f beschränkt und $||f||_\infty = sup_{x \in X}|f(x)| = max_{x \in X}|f(x)| = max(|f(x_0)|, |f(x_1)|)$

<u>Proposition:</u>

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f stetig\} \text{ ist Untervektorraum von } \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$$

<u>Proposition:</u> (gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz)

$$f_n \rightrightarrows f \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f_n \rightsquigarrow f$$

Stetigkeit bleibt bei punktweiser Konvergenz nicht erhalten.

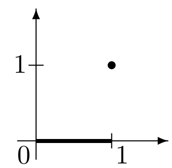
$$f_n \text{ stetig, } f_n \overset{\text{punktweise}}{\rightsquigarrow} f \not\Longrightarrow f \text{ stetig}$$

Beispiel

$f_n(x) = x^n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ Polynome, daher stetig auf $[0,1] = X$

$f_n \rightsquigarrow f$ punktweise auf $[0,1]$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 1 \\ 1 & : \quad x = 1 \end{cases}$

f unstetig in $x = 1$



Satz (Gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit)
(X, d) metrisch

$$f_n \rightrightarrows f,\ f_n \text{ stetig} \Longrightarrow f \text{ stetig}$$

Beweis

Da $f_n \rightrightarrows f$
Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, n_0\, \forall n \geq n_0 \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
$\overset{n=n_0}{\Longrightarrow} \forall\, x \in X,\ |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ (*)_x$
Sei $o \in X$. Da f_{n_0} stetig in $o \Longrightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall x \in X$,
$d(x,o) \leq \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(o)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ (**)$

z.z. f stetig in o: Sei $x \in X$, $d(x,o) \leq \delta$:

$$|f(x) - f(o)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{(*)_x \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(o)|}_{(**) \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(o) - f_{n_0}(o)|}_{(*)_o \leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon$$

Erläuterung *Hier wurde zwei mal die Dreiecksungleichung angewandt:*

$$[f(x) - f_{n_0}(x)] + [f_{n_0}(x) - f_{n_0}(o)] + [f_{n_0}(o) - f(o)]$$
$$= f(x) + [f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x)] + [f_{n_0}(o) - f_{n_0}(o)] - f(o)$$
$$= f(x) + 0 + 0 - f(o) = f(x) - f(o)$$
$$\Longrightarrow |f(x) - f(o)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(o)|}_{\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(o)|} + |f_{n_0}(o) - f(o)|$$
$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(o)| + |f_{n_0}(o) - f(o)|$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow f$ stetig in o
Da $o \in X$ beliebig $\Longrightarrow f$ stetig auf X

□

Korollar: $x^n \not\rightrightarrows f$

Satz

X kompakt, z.B. $X = [a,b] \Longrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \overset{abg.}{\subset} \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$,
also $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ vollständig, Banachraum

Beweis: Sei $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \ni f_n \rightrightarrows f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \overset{Satz}{\Longrightarrow} f$ stetig,
d.h. $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, d.h. $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ abgeschlossen

□

Beispiele gleichmäßiger Konvergenz

Funktionenreihen $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

n-te Partialsummenfunktion: $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}),\ s_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i(x)$

Definition

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_n = f$ **gleichmäßig** auf $X \Longleftrightarrow s_n \rightsquigarrow f$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in X : \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i(x) \right| \leq \varepsilon$$

symbolisch $\boxed{\sum\limits_{i=0}^{n} f_i \rightsquigarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i}$

Definition

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n = f$ **punktweise** auf $X :\Longleftrightarrow\ s_n \rightsquigarrow f$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i(x) \right| \leq \varepsilon$$

Satz

$$f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),\ f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ gleichmäßig auf } X \Longrightarrow f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$$

Beweis: Alle f_i stetig $(i \geq 0) \Longrightarrow s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \underbrace{f_i}_{\text{stetig}} \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$,

$s_n \rightsquigarrow f \overset{Satz}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ □

Definition

Sei $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ **konvergiert normal** $:\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} sup_X |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_{\infty} < +\infty$$

Bemerkung: $a_n \geq 0 \Longrightarrow s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \uparrow,\ s_n \leq s_{n+1}$

Man sagt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Longleftrightarrow (s_n)$ nach oben beschränkt, also konvergent.

Umformulierung:

$$\sum_{n \geq 0} f_n \text{ konvergiert normal} \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} ||f_i||_{\infty} \right) \text{ nach oben beschränkt}$$

Satz (Normale Konvergenz $\Longrightarrow$ absolut und gleichmäßige Konvergenz)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ konvergiert normal}$$

$$\Longrightarrow (i) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ konvergiert absolut}$$

$$\Longrightarrow (ii)\ \exists\, f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R}),\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \text{ gleichmäßig auf } X$$

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt $\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_\infty < +\infty$, wobei $||f_n||_\infty = sup_{x\in X}|f_n(x)|$

1. Schritt Konstruiere Grenzfunktion f für $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$:

Sei $x \in X$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}}_{|f_n(x)| \leq ||f_n||_\infty} ||f_n||_\infty < +\infty$$

$\Longrightarrow$ „Zahlen"reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert absolut

$\Longrightarrow \exists\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),\ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

2. Schritt Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ gleichmäßig

Sei $\varepsilon > 0$, da $\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_\infty < +\infty \Longrightarrow \exists\, n_0 : \sum_{n=n_0}^{\infty} ||f_n||_\infty \leq \varepsilon$

$\left[a_n \geq 0,\ s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = s - \sum_{n\in n_0} a_n = s - s_{n_0} \leq \varepsilon\right]$

Sei $x \in X$ beliebig, aber fest $\Longrightarrow$

$$\left|f(x) - \sum_{n\in n_0} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left|f_n(x)\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} ||f_n||_\infty \leq \varepsilon$$

Da x beliebig war $\Longrightarrow sup_X \left|f - \sum_{n=0}^{n_0-1} f_n\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ gleichmäßig auf X

□

Normale Konvergenz

X Menge, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$; sup-Norm $||f_n||_\infty = sup_{x\in X}|f_n(x)| \geq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert normal $:\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_\infty < +\infty$

Satz

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_\infty < \infty \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ konvergiert absolut und gleichmäßig}$$

Korollar

(X, d) metrischer Raum, alle f_n stetig, $\sum ||f_n||_\infty < +\infty$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Beweis

$k \in \mathbb{N}$ fest, k-te Partialsumme $s_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$ stetig auf X

$\Longrightarrow (s_k)$ konvergiert gleichmäßig auf X gegen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

$\Longrightarrow f$ stetig (gleichmäßige Konvergenz erhält die Stetigkeit) $\square$

1.5 Potenzreihen

Sei $a_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, $d(x,y) = |x-y|$; $f_n(x) = a_n x^n$ Monom

Definition formaler Ausdruck: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **Potenzreihe** (um $x_0 = 0$)
Allgemeiner: $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, x nahe bei x_0

Lemma von Abel

Sei $w > 0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ konvergiert (nicht notwendig absolut)

Sei $0 < r < w$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **normal** auf $X = [-r,r] = \mathbb{R}_r[0]$.

Beweis

Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ konvergent in $\mathbb{R} \Longrightarrow a_n w^n \rightsquigarrow 0$ *(Nullfolge, also beschränkte Folge)*
$\Longrightarrow \exists\, M > 0\ \forall\, n \geq 0 : |a_n w^n| < M$
Sei nun $r < w$ beliebig aber fest, $\forall\, x \in X = [-r,r]$
$|f_n(x)| = |a_n x^n| = |a_n| \cdot |x^n| = |a_n| \cdot |x|^n \underbrace{\leq}_{|x| \leq r} |a_n| \cdot r^n \underbrace{\leq \frac{M}{w^n}}_{|a_n| w^n \leq M} \cdot r^n = M(\frac{r}{w})^n$
$\Longrightarrow ||f_n||_\infty = sup_{x \in X}|f_n(x)| \leq M(\frac{r}{w})^n$
$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} M(\frac{r}{w})^n = M \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{r}{w})^n = M \frac{1}{1-\frac{r}{w}}}_{\text{geometr. Reihe für } q = \frac{r}{w} < 1} = M \frac{w}{w-r} < \infty$

Also $\sum f_n = \sum a_n x^n$ konvergiert normal auf $[-r,r]$ $\square$

Bemerkung: $f(x) = a_n x^n$ Monom, $X = [-r,r]$ Intervall beliebig, Rand
$\delta X = \{-r, r\} \Longrightarrow sup_X |f_n| = sup_{\delta X}|f_n|$

Definition: Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, **Konvergenzradius** $0 \leq R \leq +\infty$, eindeutig bestimmt durch:

(i) $|x| < R : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent

(ii) $|x| > R : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent

(iii) $|x| = R :$ unbekannt

Lemma von Abel

Sei $R > 0$, evtl. $R = +\infty$
$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert normal auf $[-r,r]\ \forall\, r < R$

Beweis Sei $R > 0$ und $r < R$

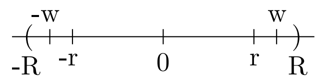
$\Longrightarrow w := \frac{r+R}{2}$ (falls $R < +\infty$)

if $R = +\infty$ wähle $w > r$

$\Longrightarrow w < R$

$\overset{\text{Def. von } R}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ konvergiert

$\overset{\text{Abel } r<w}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ normal konvergent auf $[-r, r]$



□

Bemerkung: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe, $X = [-R, R]$ abgeschlossenes Konvergenzintervall, Rand von X $\delta X = \{-R, R\} \overset{\text{häufig}}{\Longrightarrow} sup_X|f| = sup_{\delta X}|f|$ *Maximumsprinzip*

Beispiele

$R = 1,\ (-1, 1)$ offenes Konvergenzintervall

(1)

$$\text{geometrische Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(2)

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

äquivalent

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n,\ x_0 = 1 \text{ auf } (0, 2)$$

$R = \infty,\ (-\infty, \infty)$ offenes Konvergenzintervall

(3)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ a_n = \frac{1}{n!}$$

(4)

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Satz

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ist stetig auf offenem Konvergenzintervall } (-R, R)$$

Beweis

$I = (-R, R)$ offenes Konvergenzintervall $[R = +\infty,\ I = \mathbb{R}]$

z.z.: f stetig auf I

Lokale Eigenschaft sei $b \in I$ beliebig aber fest

z.z.: f stetig in b

$\Longrightarrow |b| < R$

$\Longrightarrow \exists\, r,\ |b| < r < R$

$\Longrightarrow f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert normal auf $[-r, r]$
$\Longrightarrow f$ stetig auf $[-r, r]$
$\Longrightarrow f$ stetig in b wegen $\mathbb{R}_{r-|b|}(b) \subset [-r, r]$

da $b \in I$ beliebig $\Longrightarrow f$ stetig auf I

$\square$

1.6 Räume differenzierbarer Funktionen

Definition

$X \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$, *[z.B. $X = (a, b)$]*
$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ **diffbar** in $o \in X$ $:\Longleftrightarrow$ es gilt eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften

(i) $\lim\limits_{x \rightsquigarrow o;\ x \neq o} \frac{f(x)-f(o)}{x-o} = f'(o) \in \mathbb{R}$

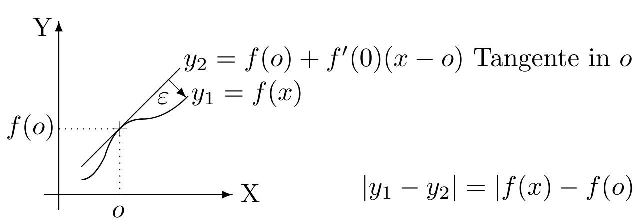
$\left[\text{Jede Folge } x = x_n \rightsquigarrow o \text{ hat einen Limes } \frac{f(x_n)-f(o)}{x_n-o} \rightsquigarrow f'(o)\right]$

(ii) $g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(o)}{x-o} & : \quad x \neq o \\ f'(o) = g(o) & : \quad x = o \end{cases}$

definiert eine Funktion g, die stetig in o ist.

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X, |x - o| \leq \delta :\ |f(x) - f(o) - f'(o)(x - o)| \leq \varepsilon |x - o|$

(iii) $\Longleftrightarrow$ Approximation durch lineare Funktion (Gerade)



$|y_1 - y_2| = |f(x) - f(o) - f'(o)(x - o)| \leq \varepsilon |x - o|$

Beweis **(iii) $\Longrightarrow$ (ii)**

Es gelte (iii):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X, |x - o| \leq \delta :\ |f(x) - f(o) - f'(o)(x - o)| \leq \varepsilon |x - o|$$

Sei $x \neq o \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(o)}{x-o} - f'(o) \right| \leq \varepsilon$ (Division durch $|x - o|$)
$\Longrightarrow |g(x) - g(o)| \leq \varepsilon \Longrightarrow g$ stetig in o

$\square$

Proposition: f diffbar in $o \Longrightarrow f$ stetig in o

Korollar Der Raum aller diffbaren Funktionen

$$\mathcal{D}(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ diffbar in jedem } o \in X \}$$

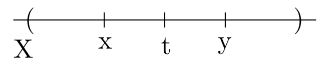
$$(f \text{ diffbar auf } X)$$

ist Untervektorraum $\mathcal{D}(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(X, \mathbb{R})$

d.h. $f,\ g$ diffbar auf $X \Longrightarrow f + g$ diffbar auf X
f diffbar auf $X \Longrightarrow cf$ diffbar auf X $(c \in \mathbb{R})$

Mittelwertsatz (MWS)

$X \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diffbar
$x, y \in X$ mit $[x, y]$ (Segment) $= \{tx + (1-t)y \mid 0 \le t \le 1\} \subset X$
Dann gilt $|f(x) - f(y)| \le |x - y| \cdot \underbrace{sup_{z\in[x,y]}|f'(z)|}_{\le +\infty}$



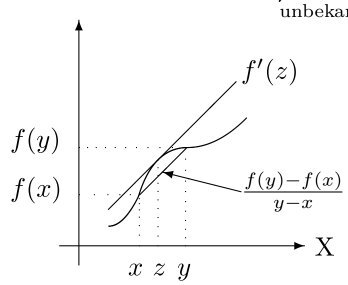
<u>Beweis</u>

Œ $x < y \Longrightarrow f$ stetig auf $[x, y]$ (sogar diffbar), diffbar auf (x, y)

Nach klassischem MWS *(siehe Mathe II)*:

$$\exists\, 0 < t < 1, \quad \underbrace{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}}_{\text{Steigung der Sekante}} = f'(\underbrace{tx + (1-t)y}_{=z \text{ zwischen } x,y}) = \underbrace{f'(z)}_{\text{Steigung der Tangente}}$$

$\Longrightarrow f(y) - f(x) = (y - x) f'(z)$
$\Longrightarrow |f(y) - f(x)| = |y - x| \cdot \underbrace{|f'(z)|}_{\text{unbekannt}} \le |y - x| \cdot \underbrace{\sup_{w\in[x,y]} |f'(w)|}_{\text{bekannt}}$



<u>Satz</u> (von der gleichmäßigen Konvergenz)

> Seien $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $\underbrace{f_n \rightsquigarrow f : X \longrightarrow \mathbb{R}}_{\text{mindestens punktweise}}$
> Es gelte für $f_n' : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ \mapsto f_n'(x) \end{array} : f_n' \rightrightarrows h,\ h : X \longrightarrow \mathbb{R}$
> Dann ist f diffbar und $f'(x) = h(x)\ \forall\, x \in X$

Formal gilt $\frac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$

<u>Beweis</u>

Wegen $f_n' \rightrightarrows h : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge m\ \forall\, x \in X : |f_n'(x) - h(x)| \le \varepsilon$
Daher gilt: $|f_n'(x) - f_m'(x)| \le |f_n'(x) - h(x)| + |h(x) - f_m'(x)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$
Sei $o \in X$, z.z. f diffbar in o und $f'(o) = h(o)$
Da $X \subset \mathbb{R}$ offen ist $\Longrightarrow \exists\, \delta > 0,\ X \supset \mathbb{R}_\delta[o] = [o - \delta, o + \delta] = I$

Benutze Mittelwertsatz:
$\forall\, x \in I$ gilt:

$$\Big|\big(f_n(x) - f_n(o)\big) - \big(f_m(x) - f_m(o)\big)\Big| = \Big|\big(f_n(x) - f_m(x)\big) - \big(f_n(o) - f_m(o)\big)\Big|$$
$$\le |x - o| \cdot \sup_{z\in[x,o]} |f_n'(z) - f_m'(z)| \le |x - o| \cdot 2\,\varepsilon$$

$\forall\, x \in I = [o - \delta, o + \delta]$:

$$\Big|\underbrace{\big(f_n(x) - f_n(o)\big)}_{\rightsquigarrow f(x) - f(o) \text{ wegen } f_n \rightsquigarrow f} - \big(f_m(x) - f_m(o)\big)\Big| \le \underbrace{|x - o|}_{\text{unabhängig von } n} \cdot 2\,\varepsilon$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \big|\big(f(x)-f(o)\big)-\big(f_m(x)-f_m(o)\big)\big| \leq 2\,\varepsilon\,|x-o|$$

$$\big[a_n \text{ Folge, } a_n \rightsquigarrow a,\ |a_n| \leq M \Longrightarrow |a| \leq M\big]$$

Da f_m diffbar in o

$$\Longrightarrow \exists\,\delta' \leq \delta\ \forall\,x \in X,\ |x-o| \leq \delta' : |f_m(x)-f_m(o)-f_m'(o)(x-o)| \leq \varepsilon\,|x-o|$$

$$\Longrightarrow \forall\,x \in X,\ |x-o| \leq \delta' : \big|\big(f(x)-f(o)\big)-h(o)(x-o)\big|$$

$$\leq \big|\big(f(x)-f(o)\big)-\big(f_m(x)-f_m(o)\big)\big| + \big|\big(f_m(x)-f_m(o)\big)-f_m'(o)(x-o)\big|$$

$$+|f_m'(o)(x-o)-h(o)(x-o)|$$

$$\leq 2\,\varepsilon\,|x-o| + \varepsilon|x-o| + |f_m'(o)-h(o)|\cdot|x-o| \leq 4\,\varepsilon\,|x-o|$$

$\big[$Bisher: $\forall\,n \geq m:\ sup|f_n'-h| \leq \varepsilon \Longrightarrow \forall\,o \in X\ \forall\,n \geq m\ |f_n'(o)-h(o)| \leq \varepsilon \Longrightarrow |f_m'(o)-h(o)| \leq \varepsilon\big]$

Also $\forall\,x \in X,\ |x-o| \leq \delta' : |f(x)-f(o)-h(o)(x-o)| \leq 4\,\varepsilon\,|x-o|$

Da Ableitung eindeutig $\Longrightarrow$ (i) f diffbar in o
(ii) $f'(o)=h(o)$

□

Anwendungen dieses Satzes

Satz

$X \subset \mathbb{R}$ offen, z.B. offenes Intervall;
$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $f_n' : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n'(x)$

Es gelte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere punktweise gegen F und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ konvergiere **normal**

$\Longrightarrow$ **(i)** $F=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ diffbar auf X **(ii)** $F'=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$

Beweis

$F_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $(\forall\,x \in X : F_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x))$

Weiter gilt: $F_n'=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k' \rightsquigarrow H := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$

[normale Konvergenz $\Longrightarrow$ absolute und gleichmäßige Konvergenz]

Nach Satz $\Longrightarrow$ **(i)** $F=lim\,F_n$ diffbar **(ii)** $F'=H=lim\,F_n'$

□

Formal schreibt man: $\frac{d}{dx}\underbrace{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}}_{\text{falls normal konvergent}}\frac{df_n}{dx}$ (gliedweise Differentiation von Reihen)

Beispiel

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ f_n(x)=a_nx^n$ Monome,

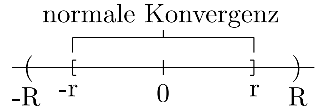
$F_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$ n-te Partialsumme (Polynom)

$F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x),\ H(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k'(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_kx^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ wobei $n=k-1$

<u>Bekannt:</u> Sei $R =$ Konvergenzradius und $r < R$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert normal auf $I = [-r, r]$



Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n' \text{ hat gleichen Konvergenzradius } R \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n' \text{ konvergiert normal auf } I$$

<u>Satz</u>

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ $(0 < R \leq +\infty)$

Dann gilt:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ Potenzreihe mit gleichem Konvergenzradius $R' = R$

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diffbar auf $X = (-R, R)$ und
$\frac{d}{dx} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (gliedweise Diffbarkeit)

<u>Beweis</u> (i) Allgemein gilt die „Cauchy-Hadamard“-Formel

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 0$$

$\Big[\overline{\lim}\ b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} b_k =$ größter Häufungspunkt von (b_n),
Häufungspunkt $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_{j_{(n)}}$ Teilfolge,
d.h. $\overline{\lim}\ b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{j_{(n)}}$ und maximal mit dieser Eigenschaft$\Big]$

z.z. $R' = R$, äquivalent $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}$ wegen $\frac{1}{R'} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|n a_n|}$

Es gilt:

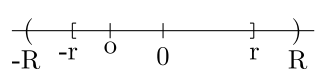
$$|n a_n| = n|a_n| \Longrightarrow |n a_n|^{\frac{1}{n}} = (n|a_n|)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \cdot |a_n|^{\frac{1}{n}} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightsquigarrow 1}\ \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right] = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|}\right) = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

(ii)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ diffbar auf } X = (-R, R)$$

Sei $o \in X$ beliebig, aber fest



$\Longrightarrow \exists\, r < R$ mit $|o| < r$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergiert normal auf $[-r, r]$, da $R' = R$

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diffbar auf $(-r, r)$ und $\frac{dF}{dx}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Da $o \in (-r, r) \Longrightarrow F$ diffbar in o und gliedweise Differentiation im Punkte o $\square$

Die Cauchy-Hadamard-Formel kann häufig ersetzt werden durch den einfacheren

Satz (elementare Berechnung des Konvergenzradius)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe (um 0) mit $a_n \neq 0$.

Angenommen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \rightsquigarrow L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0,+\infty]$
dann gilt $R = \frac{1}{L} \in [0,+\infty]$

Der **Beweis** folgt aus dem Quotientenkriterium:

$$b_n \geq 0,\ \frac{b_{n+1}}{b_n} \rightsquigarrow L \Longrightarrow \begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \quad \sum b_n < +\infty \\ L = 1 & \Longrightarrow \quad ? \\ L > 1 & \Longrightarrow \quad \sum b_n = +\infty \text{ (Divergenz)} \end{cases}$$

□

Beispiel 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ a_n = 1,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \rightsquigarrow L = 1,\ R = \frac{1}{L} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = \underbrace{(-1)(1-x)^{-2}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{innere Ableitung}} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

d.h. $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ |x| < 1$

Beispiel 2 (Satz)

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ R = +\infty \Longrightarrow$

(i) $e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diffbar

(ii) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

Beweis

$$\text{Da } R = +\infty \Longrightarrow X = (-R,R) = (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx} e^x = \exp'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!}}_{\text{gliedweise Differentation}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}\cdot\left(x^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}}_{m\,=\,n-1}\frac{x^m}{m!} = e^x$$

□

Die folgenden **speziellen Funktionen** sind besonders wichtig:

(i) Für $|x| < 1 = R$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

(ii) Für $|x| < \infty = R$,

$$f(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$f(x) = \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$$

Bereits gezeigt

$$\tfrac{d}{dx} \tfrac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \tfrac{1}{(1-x)^2}$$

$$\tfrac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

$$\tfrac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\tfrac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Als Korollar ergibt sich $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, denn die linke Seite hat Ableitung $= 0$.

Proposition Für $|x| < 1$ gilt

$$\tfrac{d}{dx} \log(1+x) = \tfrac{1}{1+x}$$

Beweis

Gliedweise Differentiation $\Longrightarrow \frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right]$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \underbrace{=}_{m=n-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^m$

$= \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ ◻

Höhere Ableitungen Für $|x| < 1$ gilt

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$,

$f'(x) = \underbrace{(-1)(1-x)^{-2}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(1-x)}_{\text{innere Ableitung}} = (1-x)^{-2}$

$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(1-x)^{-3}$

$f'''(x) = 6(1-x)^{-4} = 2 \cdot 3(1-x)^{-4}$

$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{-1} = n!(1-x)^{-n-1}$ (Beweis durch Induktion)

Alternativ: $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}$ ($k \geq 0$ beliebig, aber fest)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$f''(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(n x^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$

$f'''(x) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)x^{n-k} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = k!(1-x)^{-1-k}$

Proposition Für $|x| < 1$ gilt

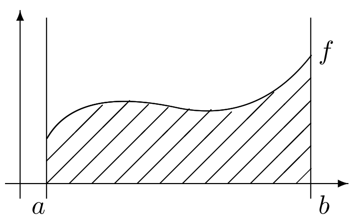
$(1-x)^{-1-k} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^{n-k} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\, x^{n-k}$ Binomische Reihe

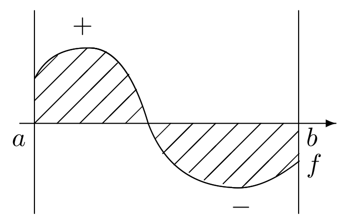
Dabei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Binomialkoeffizient

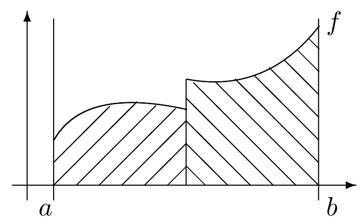
Kapitel 2

Integration

2.1 Riemann-Integral







X Menge, $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall

Für $X = [a, b]$ betrachte alle Teilintervalle $I \overset{abg.}{\subset} [a, b]$

$I = [s, t] \qquad l_I = l_{[s,t]} = t - s =$ Länge des Intervalls

<u>**Definition**</u>

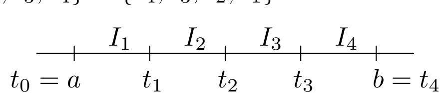
Partition $\mathcal{I}$ von X ist endliche Menge von abgeschlossenen Intervallen $I \subset X$, die *paarweise disjunkt* sind und X *überdecken*

disjunkt $\boxed{I_1, I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \cap I_2 = \begin{cases} \emptyset \\ \text{einpunktig} \end{cases}}$

Überdeckung $\boxed{X = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I}$

<u>Explizit:</u> $X = [a, b]$, naive Partition $\underbrace{a}_{= t_0} < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < \underbrace{b}_{= t_n}; \quad I_k = [t_{k-1}, t_k]$

<u>**Beispiel:**</u> $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\} = \{I_4, I_3, I_2, I_1\}$



<u>**Überlappung:**</u> $I_k \cap I_{k+1} = t_k$, $I_k \cap I_l = \emptyset$ falls $|k - l| \geq 2$

<u>**Überdeckung:**</u> $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n = [a, b]$

Bemerkung

(1) $X = [a,b]$ kompaktes Intervall $\overset{EWS}{\Longrightarrow} \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(X,\mathbb{R}),\ f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ stetig
$f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \max\limits_{[a,b]} f = f(x_1)$

(2) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton $\Longrightarrow f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R}),\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

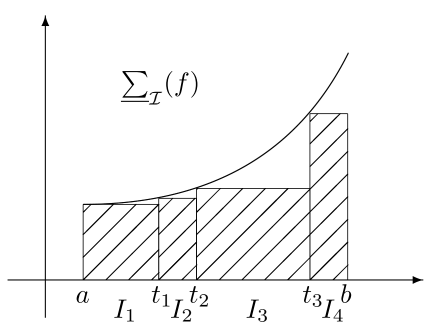
Definition $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{I}$ Partition von X

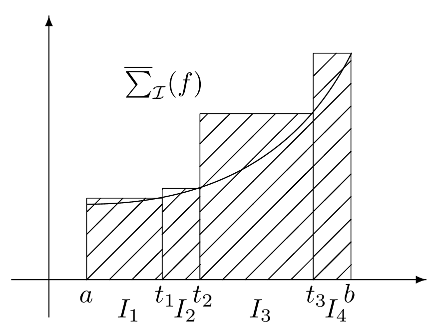
Obersumme $\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}} (\sup\limits_I f|_I) \cdot l_I$

Untersumme $\underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}} (\inf\limits_I f|_I) \cdot l_I$

Explizit

$I_k = [t_{k-1}, t_k], \quad 1 \leq k \leq n$ $\qquad \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \cdot \sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} f$





Riemann-Integral

$I \subset X$ abgeschlossene Teilintervalle; $X = [a,b]$ abgeschlossenes Intervall (fest)

Partition $\mathcal{I}$ = endliche Menge von Intervallen $I \in \mathcal{I}$ mit zwei Eigenschaften:

(i) Überlappung: $I_1, I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow \begin{cases} I_1 \cap I_2 &= \emptyset \\ I_1 \cap I_2 &= \{\text{Punkt}\} \end{cases}$

(ii) Überdeckung: $X = \bigcup\limits_{I\in\mathcal{I}} I$, d.h. $\forall\, x \in X\ \exists\, I \in \mathcal{I} : x \in I$

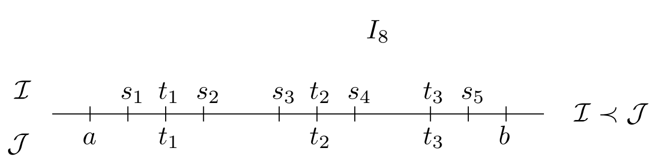
$\mathcal{I}$ Partition, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt (z.B. stetig oder monoton)

Obersumme: $\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) := \sum\limits_{I\in\mathcal{I}} l_I \cdot \sup\limits_I f = l_{I_1} \cdot \sup\limits_{I_1} f + l_{I_2} \cdot \sup\limits_{I_2} f + ... + l_{I_n} \cdot \sup\limits_{I_n} f$
Untersumme: $\underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) := \sum\limits_{I\in\mathcal{I}} l_I \cdot \inf\limits_I f$

Definition

Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ zwei Partitionen von $X = [a,b]$.
$\mathcal{I}$ ist **feiner** als $\mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \prec \mathcal{J}$) $\Longleftrightarrow \forall\, I \in \mathcal{I}\ \exists\, J \in \mathcal{J}$ mit $I \in J$

Konkret



$\mathcal{J} = \{[a,t_1],[t_1,t_2],[t_2,t_3],[t_3,b]\}$ 4 Intervalle
$\mathcal{I} = \{[a,s_1],[s_1,t_1],[t_1,s_2],...,[s_5,b]\}$ 9 Intervalle
$I = [t_1,s_2] \subset [t_1,t_2] = J$

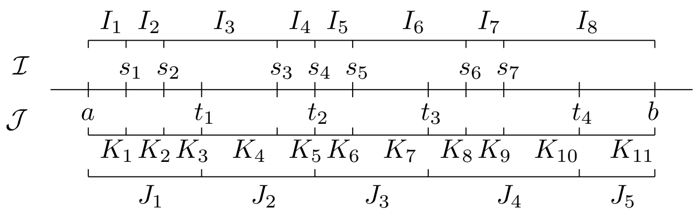
Proposition

$\prec$ definiert eine Ordnungsrelation auf der Menge aller Partitionen:
$\mathcal{I} \prec \mathcal{I}; \quad \mathcal{I} \prec \mathcal{I}' \prec \mathcal{I}'' \Longrightarrow \mathcal{I} \prec \mathcal{I}''; \quad \mathcal{I} \prec \mathcal{J}$ und $\mathcal{J} \prec \mathcal{I} \Longrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{J}$

Definition

$\mathcal{I}, \mathcal{J}$ zwei Partitionen $\Longrightarrow$ **gemeinsame Verfeinerung** von $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$:
$\mathcal{I} \curlywedge \mathcal{J} = \{I \cap J : I \in \mathcal{I}, J \in \mathcal{J}\}$
$\mathcal{I} \curlywedge \underbrace{\mathcal{J} \prec \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} \curlywedge}_{\text{wieder Intervall}} \mathcal{J} \prec \mathcal{J}$

Konkret



$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \left\{ I_m \cap J_n \,\middle|\, \begin{array}{ccc} m & = & 1,...,8 \\ n & = & 1,...,5 \end{array} \right\} = \{K_1,...,K_{11}\}$$

Proposition

Sei $\mathcal{I} \prec \mathcal{J} \Longrightarrow \mathcal{I} = \dot{\bigcup\limits_{J \in \mathcal{J}}} \mathcal{I}_J$ disjunkte Vereinigung, wobei $\mathcal{I}_J$ Partition von $\mathcal{J}$ ist.
Genauer gilt $\mathcal{I}_J = \{I \in \mathcal{J} : I \subset J\}$

Beweis

$\mathcal{I}_J := \{I \in \mathcal{J} \mid I \subset J\}$ Partition von $\mathcal{I}$; wegen $\mathcal{I} \prec \mathcal{J}$ gilt: $\forall\, I \in \mathcal{I}\ \exists\, J \in \mathcal{J} = I \subset J$,
d.h. $I \in \mathcal{I}_J \Longrightarrow \mathcal{I} = \bigcup\limits_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{I}_J$

$\square$

Zur obigen Zeichnung:
$\mathcal{I}_{J_1} = \{K_1,K_2,K_3\} \qquad \mathcal{I}_{J_2} = \{K_4,K_5\} \qquad \mathcal{I}_{J_3} = \{K_6,K_7\} \qquad \mathcal{I}_{J_4} = \{K_8,K_9,K_{10}\}$
$\mathcal{I}_{J_5} = \{K_{11}\}$
$\mathcal{I}_{J_1}$: Partition von J_1 u.s.w.

Proposition

$\mathcal{I} \prec \mathcal{J} \Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \le \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)$ und $\underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \ge \underline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)$
äquivalent: $\underline{\sum}_{\mathcal{J}} \le \underline{\sum}_{\mathcal{I}} \le \overline{\sum}_{\mathcal{I}} \le \overline{\sum}_{\mathcal{J}}$

Beweis für Obersumme

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \prec \mathcal{J} \Longrightarrow \mathcal{I} = \dot{\bigcup_{J \in \mathcal{J}}} \mathcal{I}_J \Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \sup_I f = \sum_{J \in \mathcal{J}} \overbrace{\sum_{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{J}}}}^{I \subset J} l_I \overbrace{\sup_I f}^{\le \sup_J f} \\ &\le \sum_{J \in \mathcal{J}} \sup_J f \sum_{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{J}}} l_I = \sum_{J \in \mathcal{J}} l_J \sup_J f = \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f) \end{aligned}$$

$$\text{wegen } \sum_{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{J}}} l_I = l_J \text{ also } \overline{\sum}_{\mathcal{I}} \leq \overline{\sum}_{\mathcal{J}}$$

□

Analog für Untersumme.

Korollar

jede Untersumme ≤ jede Obersumme $\forall \mathcal{I}, \mathcal{J}$ Partitionen $\underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)$

Beweis

$\mathcal{I} \curlywedge \mathcal{J} \prec \mathcal{I},\ \mathcal{I} \curlywedge \mathcal{J} \prec \mathcal{J}$
$\Longrightarrow \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I} \curlywedge \mathcal{J}}(f) \leq \overline{\sum}_{\mathcal{I} \curlywedge \mathcal{J}}(f) \leq \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)$

□

Proposition $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Dann existieren

$$\Longrightarrow \quad \overline{\int_X} f := \inf_{\mathcal{I}} \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \quad — \quad \text{Oberintegral}$$
$$\underline{\int} f := \sup_{\mathcal{I}} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \quad — \quad \text{Unterintegral}$$

und $\quad \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f)$

Beweis

Seien $\mathcal{I},\ \mathcal{J}$ Partitionen $\Longrightarrow \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)$

Sei $\mathcal{J}$ beliebig aber fest $\Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{J}}$ obere Schranke von

$\left\{\underline{\sum}_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \text{ beliebig}\right\} \Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{J}} \geq \sup_{\mathcal{I}} \underline{\sum}_{\mathcal{I}} = \underline{\int} f$

also gilt: $\underline{\int} f \leq \overline{\sum}_{\mathcal{J}}$

Sei $\mathcal{J}$ beliebig $\Longrightarrow \underline{\int} f$ untere Schranke von $\left\{\overline{\sum}_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \text{ beliebig}\right\}$

$\Longrightarrow \underline{\int} f \leq \inf_{\mathcal{J}} \overline{\sum}_{\mathcal{J}} = \overline{\int} f \Longrightarrow \underline{\int} f \leq \overline{\int} f$

□

$$\text{Oberintegral } \overline{\int} f := \inf_{\mathcal{J}} \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f) \geq \underline{\int} f = \sup_{\mathcal{I}} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \text{ Unterintegral}$$

Definition

f **integrierbar** $\Longleftrightarrow \overline{\int_b} f = \underline{\int} f =: \int f = \int_X f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \longleftarrow \quad$ Integral

Explizit: $\quad \overline{\int} f = \inf_{\mathcal{J}} \sum_{J \in \mathcal{J}} l_J \cdot \sup_J f$

Bemerkung: $\quad \max_{J \in \mathcal{J}} l_J = \text{ mesh } \mathcal{J} = \text{Schrittweite von } \mathcal{J} \longrightarrow 0$

Satz („Konvergenz-Kriterium“ für Integrierbarkeit)

f ist integrierbar mit Integral S $= \int f \Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ Partition } \mathcal{I} : \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \varepsilon \leq S \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) + \varepsilon$$

Beweis

„$\Longrightarrow$“

Sei f integrierbar und $S = \int f$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wegen $S = \overline{\int} f = \underline{\int} f$

$S - \varepsilon = \underline{\int} f - \varepsilon = \underbrace{\sup_{\mathcal{J}} \underline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)}_{\text{kleinste obere Schranke aller Untersummen}} - \varepsilon$ keine obere Schranke aller Untersummen

$\Longrightarrow \exists$ Untersumme $\quad \underline{\sum}_{\mathcal{J}_0}(f) > S - \varepsilon$

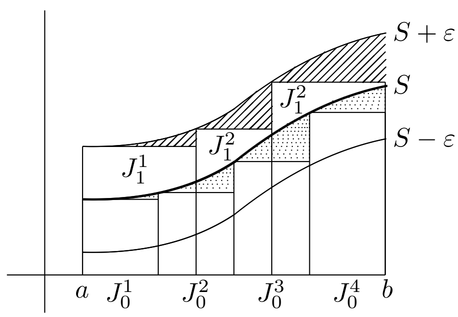
$S + \varepsilon = \overline{\int} f + \varepsilon = \underbrace{\inf_{\mathcal{J}} \overline{\sum}_{\mathcal{J}}(f)}_{\text{größte untere Schranke aller Obersummen}} + \varepsilon$ keine untere Schranke aller Obersummen

$\Longrightarrow \exists$ Obersumme $\quad \overline{\sum}_{\mathcal{J}_1}(f) < S + \varepsilon$

Setze $\mathcal{I} = \mathcal{J}_0 \curlywedge \mathcal{J}_1 = \left\{ J_0 \cap J_1 \;\middle|\; J_0 \in \mathcal{J}_0, J_1 \in \mathcal{J}_1 \right\}$ Partition

$\Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \varepsilon \underbrace{\leq}_{\mathcal{I} \prec \mathcal{J}_1} \overline{\sum}_{\mathcal{J}_1}(f) - \varepsilon < S < \underline{\sum}_{\mathcal{J}_0}(f) + \varepsilon \underbrace{\leq}_{\mathcal{I} \prec \mathcal{J}_0} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) + \varepsilon$

Damit ist „$\Longrightarrow$“ bewiesen.



$\exists$ Untersumme $\underline{\sum}_{\mathcal{J}_0}(f) > S - \varepsilon$

$\exists$ Obersumme $\overline{\sum}_{\mathcal{J}_1}(f) < S + \varepsilon$

$\mathcal{I} = \mathcal{J}_0 \curlywedge \mathcal{J}_1$

„$\Longleftarrow$“

Es gelte: $\underbrace{\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists \mathcal{I}}_{\text{abhängig von } \varepsilon}$ mit $\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \varepsilon \underbrace{\leq}_{(*)} S \underbrace{\leq}_{(**)} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) + \varepsilon$

z.z. f integrierbar und $\int f = S$

$$-\varepsilon \underbrace{\leq}_{(*)} S - \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \underbrace{\leq}_{\overline{\int} f \leq \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f)} S - \overline{\int} f \underbrace{\leq}_{\underline{\int} f \leq \overline{\int} f} S - \underline{\int} f \underbrace{\leq}_{\underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \underline{\int} f} S - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \underbrace{\leq}_{(**)} \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, $\varepsilon \longrightarrow 0 \Longrightarrow 0 \leq S - \overline{\int} f \leq S - \underline{\int} f \leq 0$ (unabhängig von ε)

$\Longrightarrow \underline{\int} f = \overline{\int} f \Longrightarrow f$ integrierbar und $S = \overline{\int} f = \underline{\int} f = \int f$

Daher ist „$\Longleftarrow$“ bewiesen.

$\square$

Definition

$\mathcal{I}(X, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) : f \text{ integrierbar} \}$ Menge aller beschränkten und **integrierbaren** Funktionen auf $X = [a, b]$

Satz

(i) $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum, genauer Unterraum von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$

(ii) $\int : \mathcal{I}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist linear (Linearform)

$\qquad f \longmapsto \int f$

Beweis z.z.

(i) f_1, f_2 integrierbar $\Longrightarrow$ $f_1 + f_2$ integrierbar und $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$ *Summenregel*

(ii) f integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha f$ integrierbar und $\int \alpha f = \alpha \int f$

(i) $\varepsilon > 0 \Longrightarrow f_1$ integrierbar

$\Longrightarrow \exists \mathcal{I}_1$ mit $\overline{\sum}_{\mathcal{I}_1}(f_1) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int f_1 \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}_1}(f_1) + \frac{\varepsilon}{2}$
$\Longrightarrow \exists \mathcal{I}_2$ mit $\overline{\sum}_{\mathcal{I}_2}(f_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_2 \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}_2}(f_2) + \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \curlywedge \mathcal{I}_2$

$$\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_1 + f_2) - \varepsilon = \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \sup_I (f_1 + f_2) - \varepsilon \underbrace{\leq \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I (\sup_I}_{\Delta\text{-Ungleichung für sup-Norm auf } I}(f_1) + \sup_I (f_2)) - \varepsilon =$$
$$\sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \sup_I (f_1) + \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \sup_I (f_2) - \varepsilon = \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_1) + \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_2) \underbrace{- \varepsilon \leq}_{\mathcal{I} \prec \mathcal{I}_1, \mathcal{I} \prec \mathcal{I}_2} \overline{\sum}_{\mathcal{I}_1}(f_1) + \overline{\sum}_{\mathcal{I}_2}(f_2) - \varepsilon =$$
$$\left(\overline{\sum}_{\mathcal{I}_1}(f_1) - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\overline{\sum}_{\mathcal{I}_2}(f_2) - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \leq \int f_1 + \int f_2 \leq \left(\underline{\sum}_{\mathcal{I}_1}(f_1) + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\underline{\sum}_{\mathcal{I}_2}(f_2) + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) =$$
$$\underline{\sum}_{\mathcal{I}_1}(f_1) + \underline{\sum}_{\mathcal{I}_2}(f_2) + \varepsilon \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_1) + \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_2) + \varepsilon = \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \inf_I (f_1) + \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \inf_I (f_2) + \varepsilon \leq$$
$$\sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \inf_I (f_1 + f_2) + \varepsilon = \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_1 + f_2) + \varepsilon$$

Da ε beliebig $\Longrightarrow$ (i) $f_1 + f_2$ integrierbar

(ii) $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$ □

Beweis von (ii) analog.

Positivitätsregel

(i) f integrierbar und $f \geq 0$ ($f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$) $\Longrightarrow \int f \geq 0$ *[Positivität]*

(ii) f_1, f_2 integrierbar und $f_1 \leq f_2 \Longrightarrow \int f_1 \leq f_2$ *[Monotonie]*

Beweis

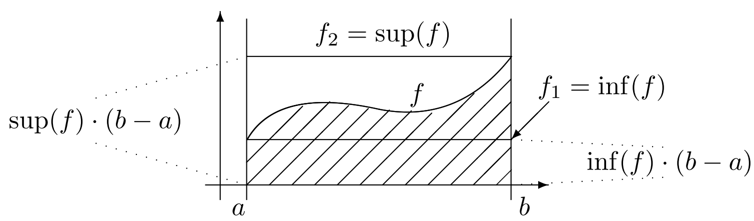
(i) Sei $\mathcal{I}$ Partition
$$\Longrightarrow \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) = \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \underbrace{\inf_I f}_{\geq 0} \geq 0 \Longrightarrow \underline{\int} f = \sup_{\mathcal{I}} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \underbrace{\geq 0 \Longrightarrow}_{f \text{ integrierbar}} \int f = \underline{\int} f \geq 0$$
□

(ii) Summenregel $f := f_2 - f_1 = f_2 + (-f_1)$ integrierbar und $f \geq 0$
$\Longrightarrow \int f_2 - \int f_1 = \int (f_2 - f_1) \underset{(i)}{\geq} 0$

□

Äquivalente Formulierung: $\mathcal{I}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$ **positive Linearform**

Korollar
f integrierbar $\Longrightarrow (b-a)\inf\limits_{[a,b]}(f) \leq \int f \leq (b-a)\sup\limits_{[a,b]}(f)$



Beweis

$f_1(x) := \inf\limits_X(f)$ konstante Funktion
$f_2(x) := \sup\limits_X(f)$ konstante Funktion
$\Longrightarrow f_1,\ f_2$ integrierbar als konstante Funktionen und $f_1 \leq f \leq f_2$ (als Funktionen auf X, punktweise), d.h. $\forall\, x \in X : \inf\limits_X(f) = f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) = \sup\limits_X(f)$ □

Für konstante Funktionen gilt $\int c = c(b-a)$, wähle $\mathcal{I} = \{X\}$.
$(b-a)\inf\limits_X(f) = \int f_1 \leq \int f \leq \int f_2 = (b-a)\sup\limits_X(f)$

Korollar
f integrierbar $\Longrightarrow |f| : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |f(x)| \end{array}$ integrierbar und $\left|\int f\right| \leq \int |f|$
(= Integralversion der Dreiecksungleichung) $[|a_1 + ... + a_n| \leq |a_1| + ... + |a_n|]$

äquivalent gilt: $\quad -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$

Beweis

(i) f integrierbar $\Longrightarrow |f|$ integrierbar (später)

(ii) punktweise: $-|f| \leq f \leq |f| \Longrightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$

Satz Stetigkeit des Integrals

Sei $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $f_n \rightrightarrows f$ (glm. Konvergenz) $\Longrightarrow$

(i) f integrierbar

(ii) $\int f_n \rightsquigarrow \int f$

Formal: $\int\limits_a^b (\lim f_n(x))\, dx = \lim \int\limits_a^b f_n(x) dx$

äquivalent:

$$\mathcal{I}(X,\mathbb{R}) \overset{\text{abg.}}{\sqsubset} \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \text{ und } \mathcal{I}(X,\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{stetig}]{\int} \mathbb{R}$$

Beweis

Sei $f_n \rightrightarrows f$ und alle f_n integrierbar,
z.z. (i) f integrierbar (ii) $S = \int f = \lim \int f_n$

$$\left|\int f_n - \int f_m\right| \underbrace{=}_{\text{linear}} \left|\int (f_n - f_m)\right| \underbrace{\leq}_{\text{positiv}} \int |f_n - f_m| \underbrace{\leq}_{\text{positiv}} (b-a) \sup_X |f_n - f_m|$$
$$= (b-a)||f_n - f_m||_\infty$$

gleichmäßige Konvergenz

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, m, n \geq n_0 ||f_n - f_m||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$
(Cauchy-Kriterium für Supremumsnorm auf X)
$\Longrightarrow \left|\int f_n - \int f_m\right| \leq (b-a)||f_n - f_m||_\infty \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)} = \varepsilon$
$\Longrightarrow \int f_n \in \mathbb{R}$ Cauchy-Folge
$\underbrace{\Longrightarrow}_{\mathbb{R}\text{ vollst.}} \exists\, S = \lim \int f_n \in \mathbb{R}$

Behauptung: f integrierbar und $\int f = S$

Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0\ \left|\int f_{n_0} - S\right| \leq \varepsilon \qquad \left(\int f_n \rightsquigarrow S\right)$
$\exists\, n_1\ \forall\, n \geq n_1\ \sup_X |f_n - f| = ||f_n - f||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \left(\int f_n \rightsquigarrow S\right)$
setze $n := \max(n_0, n_1)$

$\Longrightarrow \left|\int f_n - S\right| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon,\ ||f_n - f||_\infty \overset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{b-a}$
f_n integrierbar $\Longrightarrow \exists\, \mathcal{I}$ mit $(***)\ \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_n) - \varepsilon \leq \int f_n \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_n) + \varepsilon$

$$\Longrightarrow S - 3\varepsilon \overset{(*)}{\leq} \int f_n - 2\varepsilon \overset{(***)}{\leq} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_n) - \varepsilon \overset{(**)}{\leq} \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \overset{(**)}{\leq} \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_n) + \varepsilon$$
$$\overset{(***)}{\leq} \int f_n + 2\varepsilon \overset{(*)}{\leq} S + 3\varepsilon$$

$\Longrightarrow S - 3\varepsilon \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq S + 3\varepsilon$

$\Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - 3\varepsilon \leq S \leq \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) + 3\varepsilon$

Da ε beliebig $\Longrightarrow f$ integrierbar und $\int f = S$

□

Lemma

$f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ beschränkt. Dann gilt:
$$\left|\sup_X(f) - \sup_X(g)\right| \overset{(*)}{\leq} \underbrace{||f-g||_\infty}_{\text{Abstand von } f \text{ und } g} \overset{(**)}{\geq} \left|\inf_X(f) - \inf_X(g)\right|$$

Beweis

$(*)$
$M := ||f - g||_\infty \Longrightarrow \forall\, x \in X : |f(x) - g(x)| \leq M$
$-M \leq f(x) - g(x) \leq M$
$\Longrightarrow f(x) \leq M + \underbrace{g(x) \leq}_{g(x) \leq \sup_X(g)} M + \sup_X(g)$ obere Schranke von $f(x)$
$\Longrightarrow \sup(f) \leq M + \sup(g)$
$\Longrightarrow \sup(f) - \sup(g) \leq M$, $\sup(g) - \sup(f) \leq M$
$\Longrightarrow -M \leq \sup(f) - \sup(g) \leq M \quad \Longrightarrow |\sup(f) - \sup(g)| \leq M$

(**)
(i) Wiederhole Schritte für inf, oder

(ii) $|\inf(f) - \inf(g)| = |-\sup(-f) - (-\sup(-g))| = |\sup(-g) - \sup(-f)|$
$\overset{(*)}{\leq} ||(-g) - (-f)||_\infty = ||f - g||_\infty$

□

Korollar

$\mathcal{I}$ Partition $\Longrightarrow$

$$\left|\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(g)\right| \leq ||f-g||_\infty \cdot (b-a) \geq \left|\underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(g)\right|$$

Beweis

$$\left|\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(g)\right| = \left|\sum_{I\in\mathcal{I}} l_I \left(\sup_I(f) - \sup_I(g)\right)\right| \leq \sum_{I\in\mathcal{I}} l_I \left|\sup_I(f) - \sup_I(g)\right|$$

$$\overbrace{\leq}^{\text{Lemma}} \sum_{I\in\mathcal{I}} l_I \underbrace{||f-g||_I}_{\leq ||f-g||_\infty} \leq ||f-g||_\infty \cdot \overbrace{\sum_{I\in\mathcal{I}} l_I}^{b-a}$$

$\square$

<u>alternativer Beweis von (**) für stetige Funktionen f, f_n</u>

Seien $f,\ f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{I}$ Partition so gilt

$$||f-f_n||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_n) \leq \varepsilon$$

Beweis

$$\varepsilon \geq ||f-f_n||_\infty(b-a) = \sup_X |f-f_n|(b-a) \underbrace{\geq}_{\{X\} \succeq \mathcal{I}} \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(|f-f_n|)$$

$$\geq \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f-f_n) \underbrace{\geq}_{(*)} \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f_n)$$

$(*)$ Wähle x_m mit $f(x_m) = \sup_I(f)$. Dann gilt

$$\sup_I(f) - \sup_I(f_n) \leq f(x_m) - f_n(x_m) = (f-f_n)(x_m) \leq \sup_I(f-f_n)$$

Analog für Untersummen.

$\square$

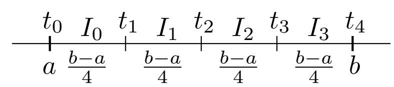
2.2 Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen

Seien $X = [a, b]$ und $n \geq 1$, $\mathcal{I}_n =$ äquidistante Partition.

$t_k = a + \frac{b-a}{n} k \qquad (0 \leq k < n,\ k \in n)$

$I_k = [t_k, t_{k+1}]$, mesh $= |\mathcal{I}| = \max\limits_{I \in \mathcal{I}} |I| = \frac{b-a}{n} \rightsquigarrow 0$

Bild einer äquidistanten Partition:



Satz

Sei $X = [a, b]$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow f$ integrierbar

abstrakt: $\underset{\text{stetig}}{\mathcal{C}(X, \mathbb{R})} \overset{\text{abg.}}{\sqsubset} \underset{\text{integrierbar}}{\mathcal{I}(X, \mathbb{R})} \overset{\text{abg.}}{\sqsubset} \underset{\text{beschränkt}}{\mathcal{B}(X, \mathbb{R})}$

Beweis

f stetig auf $X = [a, b]$ kompakt $\Longrightarrow f$ gleichmäßig stetig,
d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in X : |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Bemerkung gleichmäßig stetig $\widehat{=}$ Cauchy-Bedingung

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \forall y \in X : |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$
$a_n \rightsquigarrow$ Cauchy: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p \geq n_0\ \forall q \geq n_0 : |a_p - a_q| \leq \varepsilon$

Zu zeigen f integrierbar, d.h. z.z. $\underline{\int} f = \overline{\int} f \ \left(= s = \int f\right)$,
d.h. äquivalent: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Partition $\mathcal{I}$ mit $0 \leq \overline{\int} f - \underline{\int} f \leq \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \leq \varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0 \underset{f \text{ glm. stetig}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \forall y \in X : |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

Archimedes: $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geq \frac{b-a}{\delta}$, $\frac{1}{n} \leq \frac{\delta}{b-a}$
$\Longrightarrow \mathcal{I}_n$ äquidistante Partition mit n Intervallen

Sei $I \in \mathcal{I}_n$ $(I = [t_k, t_{k+1}]) \Longrightarrow |I| = \frac{b-a}{n} \leq \delta \Longrightarrow \forall x, y \in I : |x - y| \leq \delta$
$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \sup\limits_I(f) - \inf\limits_I(f) = f\left(x^I_{\max}\right) - f\left(x^I_{\min}\right) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\overline{\sum}_{\mathcal{I}_n}(f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}_n}(f) = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} l_I \underbrace{\left(\sup_I f - \inf_I f\right)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{I \in \mathcal{I}_n} l_I}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b - a) = \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow \overline{\int} f - \underline{f} = 0 \Longrightarrow \underline{\int} f = \overline{\int} f$

□

Beispiele (Integral stetiger Funktionen)

$\int\limits_0^y x^n \, dx = \frac{y^{n+1}}{n+1} \qquad (y > 0, n \geq 0)$

$\int\limits_0^y x \, dx = \frac{y^2}{2}$, $\int\limits_0^y x^2 \, dx = \frac{y^3}{3}$

zum Vergleich: „diskrete" Summen $\sum\limits_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum\limits_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Spezialfall: $y = 1$ $\int\limits_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$

Satz (Integrierbarkeit von Potenzreihen)

Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit Radius $R > 0$ (Bemerkung: f unbeschränkt auf $(-R, R)$)
Dann gilt $\forall\, 0 < y < R$:

(i) f integrierbar auf $[0, y]$

(ii) $F(y) = \int\limits_0^y f(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^{n+1}}{n+1} = a_0 y + \frac{a_1}{2} y^2 + \frac{a_2}{3} y^3 + \ldots$ Potenzreihe in y

(iii) F hat Konvergenzradius R

Beweis folgt aus allgemeinerem Satz:

Satz

Sei $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $\sum f_n$ normal konvergent (d.h. $\sum\limits_{n \geq 0} \sup\limits_X |f_n| < +\infty$)
$\Longrightarrow f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ integrierbar und $\int f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int f_n$

symbolisch: $\int \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int f_n(x)\,dx$

Beweis

Summenregel: $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i$ n-te Partialsumme
$\Longrightarrow s_n$ integrierbar und $\int s_n = \int \sum\limits_{i=0}^{n} f_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \int f_i$
Konvergenzregel: $s_n \rightrightarrows f$ (wegen normaler Konvergenz)
$\Longrightarrow f$ integrierbar und $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \int f_i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \int f_i$

$\square$

Satz Durchschnittswertsatz (DWS)

f stetig auf $X = [a, b]$ ($\Longrightarrow f$ integrierbar),
Durchschnittswert $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx$

$$\Longrightarrow \exists\, o \in [a, b] \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(o)$$

äquivalent: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(o)$

Beweis

$$\left.\begin{matrix}\text{ZWS}\\ \text{EWS}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{DWS}$$

Nach EWS gilt, da f stetig
$\exists\, x_0 \in X\ \exists\, x_1 \in X$ mit $f(x_0) = \min\limits_X f\ (= \inf\limits_X f)$, $f(x_1) = \max\limits_X f\ (= \sup\limits_X f)$
$\Longrightarrow (b-a) f(x_0) = (b-a) \min\limits_X f \leq \int\limits_X f \leq (b-a) \max\limits_X f = (b-a) f(x_1)$

$$\Longrightarrow f(x_0) \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int\limits_X f}_{\text{„Zwischenwert" für } f} \leq f(x_1)$$

$\overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists\, o \in X : f(o) = \frac{1}{b-a} \int f = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx$

$\square$

Satz

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar (nicht notwendig stetig) und beschränkt auf $X = [a,b]$, d.h. $\exists$ allg. Intervall $[c,d] \supset f(X)$, z.B.: $c = \inf\limits_X f$, $d = \sup\limits_X f$

Sei $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar „Kettenregel für Integrierbarkeit“

$$\begin{tikzcd} X = [a,b] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(X) \subset [c,d] \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Beweis

g stetig auf $[c,d] \Longrightarrow g$ gleichmäßig stetig auf $[c,d]$

$\Longrightarrow \forall\, \eta > 0\ \exists\, 0 < \delta \le \eta\ \forall\, y_1,\, y_2 \in [c,d],\ |y_1 - y_2| \le \delta \Longrightarrow |g(y_1) - g(y_2)| \le \eta$

f integrierbar $\Longrightarrow \exists$ Partition $\mathcal{I}$ von X mit $\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \le \delta^2$

$\mathcal{I} = \mathcal{J} \,\dot\cup\, (\mathcal{I} \setminus \mathcal{J})$ wobei

$$\mathcal{J} := \left\{ I \in \mathcal{I} \;\middle|\; \sup_I f - \inf_I f \le \delta \right\} \quad , \quad \mathcal{I} \setminus \mathcal{J} := \left\{ I \in \mathcal{I} \;\middle|\; \sup_I f - \inf_I f > \delta \right\}$$

zeige $(*)$: sei $I \in \mathcal{I}$ „gut“

$\Longrightarrow \sup\limits_I f - \inf\limits_I f \le \delta \qquad \Longrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in I |f(x_1) - f(x_2)| \le \delta$

$\underset{g \text{ glm. stetig}}{\Longrightarrow} |g(f(x_1)) - g(f(x_2))| \le \eta \qquad \Longrightarrow \sup\limits_{f(I)} g - \inf\limits_{f(I)} g \le \eta$

Für $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ gilt

$$\delta \cdot \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}} l_I \le \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}} l_I \overbrace{(\sup_I f - \inf_I f)}^{\delta < \sup_I f - \inf_I f} \le \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I (\sup_I f - \inf_I f)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \sup f - \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \inf f = \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(f) \le \delta^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}} l_I \le \delta$$

$$\Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}}(g \circ f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(g \circ f) = \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I (\sup_I (g \circ f) - \inf_I (g \circ f)) = \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I (\sup_{f(I)}(g) - \inf_{f(I)}(g))$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I \underbrace{(\sup_{f(I)}(g) - \inf_{f(I)}(g))}_{(*) \le \eta} + \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}} l_I \underbrace{(\sup_{f(I)}(g) - \inf_{f(I)}(g))}_{\le \sup g - \inf g \le 2 \sup |g|}$$

$$\le \eta \cdot \sum_{I \in \mathcal{I}} l_I + 2 \sup_{[c,d]} |g| \cdot \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}} l_I \le \eta(b-a) + 2 \cdot \sup_{[c,d]} |g| \cdot \underbrace{\delta}_{\le \eta}$$

$$= \eta(b - a + 2 \sup |g|) = \varepsilon$$

gegeben $\varepsilon > 0$, wähle $\eta = \frac{\varepsilon}{b - a + 2 \sup |g|}$

Also gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathcal{I}$ mit $\overline{\sum}_{\mathcal{I}}(g \circ f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}}(g \circ f) \le \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow g \circ f$ integrierbar

$\square$

Anwendungen

Proposition

Seien f, f_1, f_2 intergrierbar, dann gilt:

(i) $|f| : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |f(x)| \end{array}$ integrierbar und $|\int f| \leq \int |g|$

(ii) $f_1,\, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

(iii) $\max(f_1, f_2) : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar} \\ x \longmapsto \max(f_1(x), f_2(x)) \end{array}$

$\min(f_1, f_2)$ integrierbar

Beweis

(i) $g(y) = |y|$

$\Longrightarrow g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetig $\Longrightarrow |f| = |\cdot| \circ f = g \circ f$ integrierbar

(ii) $g(y) = y^2$

$\Longrightarrow g = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetig $\Longrightarrow f^2 = ()^2 \circ f = g \circ f$ integrierbar

$\Longrightarrow f_1 f_2 = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(f_1 + f_2)^2}_{\text{int.}} - \underbrace{f_1^2}_{\text{int}} - \underbrace{f_2^2}_{\text{int}}\Big)$ integrierbar (binomische Formel)

(iii)

$\max(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{f_1}_{\text{int}} + \underbrace{f_2}_{\text{int}} + \underbrace{|f_1 - f_2|}_{\text{int.wg.(i)}}\Big)$ integrierbar

$\min(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{f_1}_{\text{int}} + \underbrace{f_2}_{\text{int}} - \underbrace{|f_1 - f_2|}_{\text{int.wg.(i)}}\Big)$ integrierbar

□

Beispiele

Dirichlet-Funktion $\chi(x) := \begin{cases} 1,\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

χ nicht integrierbar; $|\chi| = \chi$ nicht integrierbar

$$f(x) := \begin{cases} 1,\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f nicht integrierbar; $|f|$ integrierbar

Lebesgue

f integrierbar $\Longleftrightarrow |f|$ integrierbar

Satz

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton $\Longrightarrow f$ integrierbar (und beschränkt)

Beweis (Teleskopsumme)

Œ: f monoton wachsend $\Longrightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $f(a) = \min\limits_{[a,b]} f = \inf\limits_{[a,b]} f$

$f(b) = \max\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{[a,b]} f$

Sei $\varepsilon > 0$

$\overset{\text{Arch.}}{\Longrightarrow} \exists\, n$ mit $(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{n} \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow \mathcal{I}_n$ äquidistante Partition von $[a,b]$

$\Longrightarrow \overline{\sum}_{\mathcal{I}_n}(f) - \underline{\sum}_{\mathcal{I}_n}(f) = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}} \frac{b-a}{n} \cdot (\sup\limits_I f - \inf\limits_I f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{I\in\mathcal{I}} (\sup\limits_I f - \inf\limits_I f)$

$= \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\sup\limits_I f - \inf\limits_I f) \left[f(a + \frac{k+1}{n}(b-a)) - f(a + \frac{k}{n}(b-a))\right]$

$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \leq \varepsilon \qquad$ (Teleskopsumme)

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow f$ integrierbar

$\square$

Beispiel Teleskopsumme

$$n = 4 \qquad \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{3} \left(f(a + \tfrac{k+1}{4}(b-a)) - f(a + \tfrac{k}{4}(b-a))\right) \\ &= f(a + \tfrac{b-a}{4}) - f(a) && [k=0] \\ &+ f(a + \tfrac{2}{4}(b-a)) - f(a + \tfrac{1}{4}(b-a)) && [k=1] \\ &+ f(a + \tfrac{3}{4}(b-a)) - f(a + \tfrac{2}{4}(b-a)) && [k=2] \\ &+ f(b) - f(a + \tfrac{3}{4}(b-a)) && [k=3] \end{aligned}$$

2.3 Integration und Differentiation

Proposition

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $a < c < b \Longrightarrow$

(i) $f\big|_{[a,c]}$ integrierbar, $f\big|_{[c,b]}$integrierbar

(ii) $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Beweisskizze:

Wähle (genügend feine) Partitionen $\mathcal{I}$, welche c enthalten. Sei $\mathcal{I}$ beliebige Partition

$\Longrightarrow \exists \mathcal{I}_c \prec \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_c$ enthält $c \Longrightarrow \mathcal{I}_c = \mathcal{I}_c{}' \,\dot\cup\, \mathcal{I}_c{}''$

mit $\mathcal{I}_c{}'$ Partition von $[a,c]$, $\mathcal{I}_c{}''$ Partition von $[c,b]$

$\Longrightarrow \underline{\sum}_{\mathcal{I}_c}(f) = \underline{\sum}_{\mathcal{I}_c{}'}\left(f\big|_{[a,c]}\right) + \underline{\sum}_{\mathcal{I}_c{}''}\left(f\big|_{[c,b]}\right)$

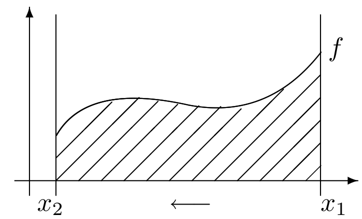
Analog für Obersumme.

$\Longrightarrow \underline{\int} f = \underline{\int} f\big|_{[a,c]} + \underline{\int} f\big|_{[c,b]}$ und analog für Oberintegral $\overline{\int}$

Definition

Sei f integrierbar auf $X = [a,b]$, seien $x_1 \in X, x_2 \in X$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} f = \begin{cases} \int f\big|_{[x_1,x_2]} & \text{falls } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 \\ -\int\limits_{x_2}^{x1} f = -\int f\big|_{[x_2,x_1]} & \text{falls } x_1 > x_2 \end{cases}$$



Bemerkung

$$f > 0,\ x_1 > x_2 \Longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f = -\int_{x_2}^{x_1} f < 0$$

Proposition

$(*)$ $\qquad f$ integrierbar auf $[a,b]$, $x_1, x_2, x_3 \in X \Longrightarrow \int_{x_1}^{x_3} f = \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_3} f$

Beweis

Für $x_1 < x_2 < x_3$ bereits gezeigt: $[x_1, x_3] = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3]$

Falls $x_3 < x_1 < x_2$: $\int_{x_1}^{x_3} f = -\int_{x_3}^{x_1} f,\ \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_3} f = \int_{x_1}^{x_2} f - \int_{x_3}^{x_2} f$

Z.z.: $-\int_{x_3}^{x_1} f = \int_{x_1}^{x_2} f - \int_{x_3}^{x_2} f$ $\qquad$ äquivalent z.z.: $\int_{x_3}^{x_2} f = \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_3}^{x_1} f$

$[x_3, x_2] = [x_3, x_1] \cup [x_1, x_2]$

□

Satz

f integrierbar auf $X = [a,b]$, Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f$ für $x \in X$

$\Longrightarrow F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$

Beweis

Seien $x, y \in X : |F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| \underbrace{=}_{\text{nach }(*)} \underbrace{\left| \int_x^y f \right| \leq}_{\text{(Monot.)}} |y - x| \cdot \sup_{[a,b]} |f|$

Setze $M := \sup_{[a,b]} |f| \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 :\ \ \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$

$\Longrightarrow \forall\, x, y \in X, |x - y| < \delta \Longrightarrow |F(x) - F(y)| \leq M \cdot \underbrace{|x - y|}_{\leq \delta} = M \cdot \delta = \varepsilon$

□

1. Hauptsatz

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $o \in X$, $\qquad F(x) = \int_a^x f$, f stetig in $o \Longrightarrow$

(i) $F(x)$ diffbar in o $\left(F(x) := \int_a^x f \right)$

(ii) $F'(o) = f(o)$

$\Big\}$ Differentiation $\circ$ Integration =Identität

Formel $\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$

Beweis

f stetig in $o \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ |x - o| \leq \delta : |f(x) - f(o)| \leq \varepsilon$

Dann gilt $\forall |x - o| \leq \delta : |\underbrace{F(x) - F(o)}_{\Delta y} - \underbrace{f(o)}_{\downarrow\ \text{vermutete Ableitung}} \underbrace{(x - o)}_{\Delta x}| =$