Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 4 –

Abgabe Freitag, 13.05.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 14 (4 Punkte). Sei $\{x_n\}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_n in $K(a, \epsilon)$ liegen.

Man zeige: $a \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Limesmenge $E(\{x_n\})$, wenn a ein Häufungspunkt ist.

Aufgabe 15 (3 Punkte). Berechnen Sie $\underline{\lim} a_n$ und $\overline{\lim} a_n$ für die nachstehenden Folgen:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad b_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right), \quad c_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Aufgabe 16 (6 Punkte). Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$. Man zeige:

a) $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$ und $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$

b) Falls $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ beschränkt sind gilt:

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$$

c) Falls $a_n > 0$, $b_n > 0$, so gilt:

$$(\underline{\lim}\, a_n) \cdot (\underline{\lim}\, b_n) \leq \underline{\lim}\,(a_n b_n) \leq (\underline{\lim}\, a_n) \cdot (\overline{\lim}\, b_n)$$

Aufgabe 17 (5 Punkte). Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + \cdots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}} = \frac{2^k}{k+1}.$$