Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 5 –

Abgabe Freitag, 20.05.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 18 (6 Punkte). Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume. Sei $A \subset X_1 \times X_2$ und x_2 ein beliebiges Element aus X_2.

a) Man zeige aus $A \subset X_1 \times X_2$ offen folgt, dass

$$P_{x_2}(A) := \{x \in X_1; (x, x_2) \in A\} \subset X_1$$

offen in X_1 ist.

b) Man zeige mithilfe von a), dass das Produkt $X = X_1 \times X_2$ zusammenhängend ist, falls X_1 und X_2 zusammenhängend sind.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Sei X ein metrischer Raum, der aus endlich vielen Punkten besteht und der mindestens zwei Punkte hat. Beweisen Sie, dass X nicht zusammenhängend sein kann.

Aufgabe 20 (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{C},\ x \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

b) Sei $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$. Beweisen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfolge $x_n = a_n - a_{n-1}$ und leiten Sie eine Formel her, die x_n durch x_{n-1} ausdrückt.

Aufgabe 21 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

konvergiert in dem Sie zeigen, dass sie nach unten beschränkt und monoton fallend ist. bestimmen Sie außerdem den Grenzwert der Folge.