Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 8 –

Abgabe Freitag, 17.06.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 33 (5 Punkte). Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$, c.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

d.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+1/n)^n}$, e.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$

Aufgabe 34 (3 Punkte). Beweisen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und gilt $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) = 0$.

Aufgabe 35 (3 Punkte). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen. Beweisen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ konvergent sind.

Aufgabe 36 (3 Punkte). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen und $r_n := \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ das n-te Restglied. Beweisen Sie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 37 ((Lebesgue-Zahl einer Überdeckung) 4 Punkte).
Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von A. Beweisen Sie, dass eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für ein beliebiges $a \in A$ ist $K(a, \epsilon)$ vollständig in einem U_i enthalten.