Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 10 –

Abgabe Freitag, 01.07.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 42 (4 Punkte).

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = f(1) \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage erst für $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 43 (4Punkte). Untersuchen Sie die Existenz folgender Grenzwerte:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{x^2+y^2}.$$

Aufgabe 44 (4 Punkte). Ist die folgende Aussage richtig?
Ist $f : X \to Y, g : Y \to Z$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ sowie $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} g \circ f(x)$.

Beweisen Sie die Aussage oder konstruieren Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 45 (5 Punkte). Wir definieren $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{wenn } x = \frac{m}{n} \text{ rational und } m,n \text{ teilerfremd sind} \\ 0 & \text{wenn } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f an jeden rationalen Punkt unstetig ist und an jedem irrationalen Punkt stetig ist.

Hinmweis: Um zu zeigen, dass f in jedem irrationalen Punkt $x_0 \in (0,\infty)$ stetig ist, beweisen Sie, dass für gegebene $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ die Menge

$$M_{\epsilon,\delta} := \{y \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap (0,\infty) | f(y) \geq \epsilon\}$$

höchstens endlich ist.