Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis 1

– Blatt 11 –

Abgabe Freitag, 08.07.2011 vor der Vorlesung bis 8:10

Aufgabe 46 (5 Punkte). Untersuchen Sie, welche dieser Folgen gleichmäßig konvergent sind:

a.) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ auf $X = [0, 1]$;

b.) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ auf $X = (0, \infty)$;

c.) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x+1}$ auf $X = [0, 1]$;

d.) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln\left(\dfrac{x}{n}\right)$ auf $X = (0, 1)$;

e.) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ auf $X = [1, \infty)$.

Aufgabe 47 (4Punkte). Sind die folgenden Abbildungen gleichmäßig stetig?

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$

b) $g : \begin{cases} [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases}$

Aufgabe 48 (4 Punkte).

a) Man zeige, dass die Einheitssphäre $\mathcal{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ im euklidschen Raum $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist.

b) Sei $f : \mathcal{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige, dass dann ein Punkt $x \in \mathcal{S}^1$ existiert mit $f(x) = f(-x)$.

   Himweis: Man nutze den Zwischenwertsatz für $h(x) := f(x) - f(-x)$.

Aufgabe 49 (4 Punkte). Zeigen Sie: Ist eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig, so ist ihr Graph $G(f) = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$. Beweisen Sie weiterhin, dass im Fall eines kompakten Raumes Y die Umkehrung gilt. Geben Sie letztlich ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung i.A. nicht gilt.