Philipps Universität Marburg

16.7.2011

Analysis I. Klausur
Musterlösungen

Aufgabe 1

1. Es ist für $n \to \infty$ (1)

$$\frac{(9n+4)^2}{3n^2+4n+2} = \frac{81n^2+36n+16}{3n^2+4n+2} = \frac{81+\frac{36}{n}+\frac{16}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} \to 27,$$

da $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ Nullfolgen sind und $\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ $(\lim b_n \neq 0)$, falls die Grenzwerte existieren.

1 P

2. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3+\sqrt{n}}$ ist eine Leibniz-Reihe: Sie ist alternierend (0,5) und es gilt $\left|\frac{(-1)^n}{3+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{3+\sqrt{n}} \to 0$ auf monotone (0,5) Weise. Also ist die Reihe konvergent.

1 P

Philipps Universität Marburg

Aufgabe 2

Sei $\{(x_n,y_n,z_n)\}$ eine Folge aus A, welche ~~gegen~~ in $(\mathbb{R}^3,d)$ gegen $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ konvergiert. (0,5) Dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\sqrt{x_n^2+y_n^2}\le z_n\le 1.$$

(0,5)

Aufgrund der Stetigkeit von x^2 auf $\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}$ ist insbesondere $t\longmapsto\sqrt{t}$ stetig auf $\mathbb{R}_+$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\sqrt{x^2+y^2}$.
Wegen $z_n\to z$ folgt somit mittels Grenzwertbildung (0,5)

$$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1.$$

Also ist $(x,y,z)\in A$ und somit A abgeschlossen.

(0,5)

2P

Alternativ: • Mittels der Parametrisierung (1)

$$\Phi:[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]\longrightarrow A,$$

$$(r,\varphi,z)\longmapsto z(r\cos\varphi,r\sin\varphi,1)$$

und der Tatsache, daß Bilder komp. Räume unter stetigen Abbildungen (0,5) wieder kompakt sind. (0,5)

- Unter Verwendung der Tatsache, daß Urbilder abg. Teilmengen wieder abgeschlossen sind unter stet. Abbildungen
- Unter Verwendung von ε-Kugeln ...

Philipps Universität Marburg

Aufgabe 3

Wir betrachten jeweils die gegen $(0,0)$ konvergenten Folgen $\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\}$ und $\{(\frac{1}{n},0)\}$. Dann ist jeweils

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = 0 \quad , \qquad f\left(\frac{1}{n},0\right) = 1 \qquad 1$$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right)$. Also existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht und f ist nicht stetig in $(0,0)$.

0,5 $\qquad$ 0,5

2P

Aufgabe 4

Betrachte $\left|\frac{a^{x+in}}{n^{1+a}}\right| = \frac{|a^x|\overbrace{|a^{in}|}^{=1}}{n^{1+a}} \leq \frac{a^r}{n^{1+a}}$

für $x \in [-r, r]$

Da $a>0$ ist konvergiert $\sum \frac{1}{n^{1+a}}$ und somit auch $\sum \frac{a^r}{n^{1+a}}$

Damit folgt mit Satz aus VL, dass $\sum \frac{a^{x+in}}{n^{1+a}}$ auf $[-r, r]$ gleichmäßig konvergiert

Zur Stetigkeit der Grenzfunktion:

z.z. Grenzfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, fest und wähle $r \in \mathbb{R}$ mit $x \in [-r, r]$

da die Reihe auf $[-r, r]$ ~~konvergiert~~ gleichmäßig konvergiert, ist die Grenzfunktion auf $[-r, r]$ definiert und da für alle n: $\frac{a^{x+in}}{n^{1+a}}$ auf $[-r, r]$ stetig ist, ist die Grenzfunktion auf $[-r, r]$ stetig, also auch insbesondere im Punkt x.

Da x beliebig war, ist die Grenzfunktion in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig $\square$

Philipps Universität Marburg

Aufgabe 5

1. Man berechnet

$$\sup_{x\in[1,2]} \left| \frac{n\ln x}{n+x+2} - \ln x \right| = \ln 2 \cdot \sup_{x\in[1,2]} \left| \frac{x+2}{n+x+2} \right|$$

1

$$= \ln 2 \cdot \frac{4}{n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

so daß $f_n(x) = \frac{n\ln x}{n+x+2} \rightrightarrows \ln x$ auf $[1,2]$.

1

2P

2. Offensichtlich gilt $f_n(x) = 0$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$, falls nur n hinreichend groß ist (in Abhängigkeit von x). Also gilt $f_n \to f = 0$ punktweise. Andererseits ist

1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{\substack{\cancel{x\in\mathbb{R}} \\ x\in[n,2n]}} \frac{3x^2}{1+x^2} \;\cancel{=}\; \xrightarrow{n\to\infty} 3,$$

so daß $f_n \not\rightrightarrows 0$ auf $\mathbb{R}$.

1

2P

Philipps Universität Marburg

Aufgabe 6

Man berechnet für $a_n = \frac{n}{3^n}$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \sup E\left(\{\sqrt[n]{|a_n|}\}\right) = \sup \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$$ 1

Tatsächlich ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}$ 0,5 $\longrightarrow \frac{1}{3}$ für $n \to \infty$.

Damit ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(z-z_0)^n$ gegeben durch

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 3 .$$

0,5

2P

Aufgabe 7

Offenbar ist $h(0) = f(0) - 0 \geq 0$ (0,5) und $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Gilt nun $h(0) = 0$ oder $h(1) = 0$, so hat f bei 0 oder 1 einen Fixpunkt (0,5). Sei also

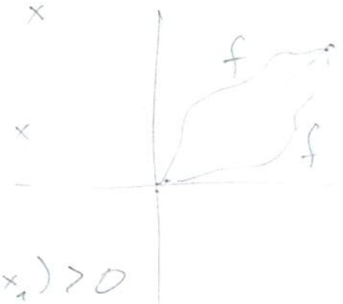
$$h(0) > 0 \quad \text{und} \quad h(\cancel{0}\,1) < 0. \quad (0,5)$$

Das Intervall $[0,1]$ ist zusammenhängend und $h(x)$ ist stetig. Nach dem Zwischenwertsatz (1) von Darboux existiert dann ein $x_0 \in [0,1]$ mit $h(x_0) = 0$. Also ist $f(x_0) = x_0$. (0,5)

3P

~~[illegible]~~

1. $h(x) \geq 0 \quad \forall x$
2. $h(x) \leq 0 \quad \forall x$
3. $\exists\, x_1, x_2 : h(x_1) > 0$, $h(x_2) < 0 \longleftrightarrow$ ZWS



Philipps Universität Marburg

Aufgabe 8

1. Der Limes superior von $\{x_n\}$ ist als das Supremum der Limesmenge $E(\{x_n\}) = \{x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} :$ es existiert eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \}$ definiert.

1P

2. Es gilt

X ist kompakt $\Longleftrightarrow$ Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

$\Longleftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. 0,5

$\Longleftrightarrow$ X ist vollständig und besitzt die Hausdorff-Eigenschaft. 0,5

1P

3. Das Cauchy-Produkt zweier Reihen komplexer Zahlen ist absolut konvergent 0,5, falls beide Reihen absolut konvergent sind. Sind $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ zwei Reihen, so ist dann Cauchy-Produkt gegeben durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad , \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

0,5

1P

Philipps Universität Marburg

<u>Aufgabe 9</u>

1. Falsch
2. Richtig
3. Falsch
4. Falsch
5. Richtig
6. Richtig

3P