Aufgabe 2

$$a_n = \sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$$

(1) Es gilt (Potenzrechenregeln)

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}^2} \cdots 2^{\frac{1}{2}^n} = 2^{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i}$$

(2) da $\sqrt[m]{2} > 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(3) a_n ist mon. steigend

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[2^{n+1}]{2} \geq 1$$

(4) $a_n < 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis $\frac{2}{a_n} = 2^1 \cdot 2^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i} = 2^{1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i} = (*)$

Aus Aufgabe 20 (Übungsblätter)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow (*) = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \geq 1$ da $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(5) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

<u>Beweis</u>: betrachte $b_n = \frac{2}{a_n} \overset{(4)}{=} 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Es gilt $b_n \to 1$:

Aus VL: $\sqrt[m]{2} = 2^{\frac{1}{m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$

Sei $\varepsilon > 0$ dann $\exists M \in \mathbb{N}$ mit $|2^{\frac{1}{m}} - 1| < \varepsilon$ $\forall m \geq M$

da $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ $\exists N: \forall n > N$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{M}$

$\Rightarrow \forall n \geq N: 1 \leq 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} < 2^{\frac{1}{M}} < 1+\varepsilon \Rightarrow |2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1| < \varepsilon$

da $a_n = \frac{2}{b_n}$ und $b_n \to 1$ folgt mit Rechenregeln für GW:

$$a_n \to \frac{2}{\lim b_n} = 2$$