Aufgabe 4

Sei $x \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

da $x,n>0$ folgt $a_n > 0 \;\forall n$

(1) Zeige, dass a_n monoton steigend (analog zum Fall $x=1$):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{(n+x+1)}{n+1}\cdot\frac{n}{n+x}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n^2+(x+1)n\overbrace{+x-x}^{=0}}{n^2+(x+1)n+x}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\underbrace{\frac{x}{(n+1)(n+x)}}_{>-1 \text{ da } n>0}\right)^{n+1}$$

Bernoulli

$$\geq \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{(n+1)x}{(n+1)(n+x)}\right)$$

$$= \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(\frac{n+x-x}{n+x}\right) = 1 \checkmark$$

(2) da $x \in \mathbb{N}$ ist $\{a_{xn}\}_{n=1}^{\infty}$ Teilfolge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_{x\cdot n} = \left(1+\frac{x}{xn}\right)^{xn} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x$$

Aus VL bekannt $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Rechenregel GW

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{xn} = e^x$$

(3) $\{a_n\}$ ist also monoton steigend und hat konvergente Teilfolge hieraus folgt, dass $\{a_n\}$ selbst beschränkt ist mit Schranke e^x

<u>Beweis</u>

Angenommen $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > e^x$

Sei $m > n_0$ mit $m = x m'$ und $m' \in \mathbb{N}$

dann gilt wegen der Monotonie $a_{xm'} \geq a_{n_0} > e^x$ $(*)$

da $\{a_{xn}\}_{n=1}^{\infty}$ jedoch monoton steigend und gegen e konvergent ist

~~folgt~~ muss gelten $a_{xn} \leq e^x \;\forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$ zu $(*)$

(4) $\{a_n\}$ ist also monoton steigend und kgt. Da die TF $\{a_{xn}\}$ gegen e^x konvergiert muss also auch $\{a_n\}$ gegen e^x konvergieren. (Bei einer kgt Folge konvergieren <u>alle</u> TF gegen den selben GW wie die Folge selbst)

$\square$