Fachbereich Mathematik & Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola

Wintersemester 2010/11
Ferienblatt

# Grundlagen der Mathematik

**Bemerkung.** Das Blatt ist in der ersten Woche des Sommersemesters in der Vorlesung „Analysis 1“ (Prof. Ramacher) abzugeben und wird dort besprochen. Die Punkte werden dort angerechnet.

**1.** Man beweise mittels vollständiger Induktion, dass die Potenzmenge $\wp(X)$ einer $n$-elementigen Menge genau $2^n$ Elemente hat. (2 Punkte)

**2.** Man beweise folgende Eigenschaft der Binomialkoeffizienten einmal durch ein kombinatorisches Abzählargument und einmal durch einen geeignet gewählten Koeffizientenvergleich:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

Was ergibt sich im Spezialfall $n = m = k$? (4 Punkte)

**3.** Man beweise durch ein geschicktes Ableitungsargument: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

(2 Punkte)

**4.** Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert als die Folge $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Man beweise

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}$$

und erläutere dieses Ergebnis anhand des Pascal'schen Dreiecks. (3 Punkte)

**5.** Seien $M$ und $N$ endliche Mengen der Kardinalität $m$ bzw. $n$, $n \geqslant m$. Man beweise, dass es $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ injektive Abbildungen von $M$ nach $N$ gibt. (3 Punkte)

**6.** Man bestimme die Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{36}{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2}$,

b) $g(x) = \dfrac{6x^2 - 14x - 2}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$,

b) $h(x) = \dfrac{4x^3 - 6x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 - 2x + 4}$.

(3 × 2 Punkte)

**Wir wünschen eine erholsame „vorlesungsfreie Zeit“!**