

Übungen zur Analysis 2

– Blatt 1 –

Abgabe Freitag, 28.10.2011, nach der Vorlesung

Aufgabe 56 (4 Punkte). Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$$\frac{2x}{1-x^2}, \quad \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x), \quad \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right), \quad \ln(\sin(x)), \quad x^x.$$

Aufgabe 57 (4 Punkte). Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(0) = 0$, die gerade ist (d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), aber in 0 kein lokales Extremum hat.

Aufgabe 58 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(x))}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right),$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos(x)\right)^{1/x}.$$

***Aufgabe 59** (4 Punkte). Sei f differenzierbar im offenen Intervall (a, b) und sei f' beschränkt. Beweisen Sie, dass dann f gleichmässig stetig auf (a, b) ist.

***Aufgabe 60** (4 Punkte). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar und gelte $f'(a) = f'(b) = 0$. Dann existiert ein Punkt $c \in (a, b)$ mit

$$(1) \quad |f''(c)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

Bemerkung: Tatsächlich gilt sogar

$$(2) \quad |f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

Ohne Integralrechnung ist der Beweis jedoch etwas schwieriger. Diskutieren Sie im Tutorium, wo im Beweis der Abschätzung (1) Verbesserungspotential ist. (Wer eine korrekte, sauber und verständlich aufgeschriebene Lösung der Abschätzung (2) liefert, bekommt 4 Zusatzpunkte)

Aufgabe LA1 (2 Punkte). Arbeiten Sie das sage-Tutorial auf www.mathematik.uni-marburg.de/~weich/Analysis2/Blaetter.html bis zu Aufgabe 1 durch und bearbeiten Sie diese.

Aufgabe LA2 (6 Punkte).

Versuchen Sie in wenigen Worten eine Antwort auf die Frage:

Warum sollte man (will ich) Analysis unterrichten?

Gegebenenfalls spricht auch vieles dagegen, Analysis zu unterrichten. Auch solche Überlegungen dürfen argumentativ miteinbezogen und abgewogen werden.

Um einen Bezugsrahmen zu haben, vor dessen Hintergrund man die Frage setzen kann, können Sie die folgenden Grundvorstellungen nach Winter benutzen:

“Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.” [2]

Sie sind unter anderem Kern einer Expertise im Auftrag der Kultusministerkonferenz der Länder im Jahre 2000 war, und zum Beispiel im Hessischen Kerncurriculum (im Grunde Lehrplan) der Sekundarstufe I für Gymnasien[1] grundlegender Bestandteil ist.

Auch folgende Stichpunkte könnten für Ihre Überlegungen interessant sein:

- Anwendungsorientierung
- Zusammenhänge und Bedeutung
- Kalkül
- Vernetzung

Anmerkung: eine angegebene Literatur heißt nicht, dass Sie die aufgeführte Literatur zur Lösung der Aufgabe benötigen oder damit zwangsläufig besser abschneiden. Einmal hineinzulesen oder ein eventuelles Anlegen einer Literaturliste (für später) mag dennoch empfehlenswert sein. Links zur angegebenen Literatur befinden sich auf der VL Homepage.

Literatur

[1] Hessen Kultusministerium. Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Sekundarstufe I–Gymnasium. Mathematik, 2011.

[2] H. Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61:37–46, 1995.