Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Analysis 2

– Blatt 2 –

Abgabe Freitag, 04.11.2011 nach der Vorlesung

Aufgabe 61 (4 Punkte). Man prüfe folgende Anwendung des Satzes von "de l'Hôpital" auf seine Richtigkeit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}$$

Prüfen Sie direkt ob der Grenzwert auf der rechten oder linken Seite existiert und berechnen Sie ihn gegebenenfalls. Wieso liegt trotzdem kein Widerspruch zur Regel von de l'Hôpital vor?

Aufgabe 62 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen equivalent sind:

a) f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = c$.

b) Es existiert eine in x_0 stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x_0) = c$ und $f(x) = f(x_0) + h(x)(x - x_0)$.

c) Es existiert eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0$.

***Aufgabe 63** (5 Punkte). Sei

$$r(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{Falls } x > 0 \\ 0 & \text{Falls } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie, die Funktion $s(x) = r(x+1)r(1-x)$ und zeigen Sie, dass die Funktion unendlich oft differenzierbar ist.

b) Wie lautet die Taylorreihe von $s(x)$ im Punkt $x = -1$. Wie groß ist der Konvergenzradius der Taylorreihe?

c) Ist $s(x)$ analytisch? Gibt es überhaupt analytische Funktionen auf $\mathbb{R}$, die nur auf einem beschränkten Intervall ungleich Null sind? (Tipp: Zeigen Sie, dass bei analytischen Funktionen die Taylorreihe lokal gleichmäßig konvergent sein muss.)

***Aufgabe 64** (3 Punkte). Zeigen sie für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Existiert $f''(x)$, so gilt

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

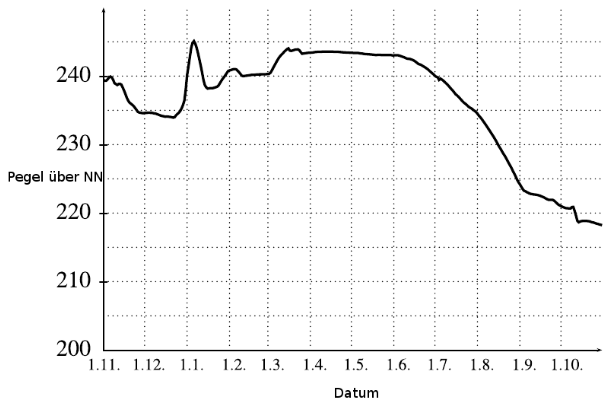
Tipp: Nutzen Sie die Regel von de l'Hôpital.

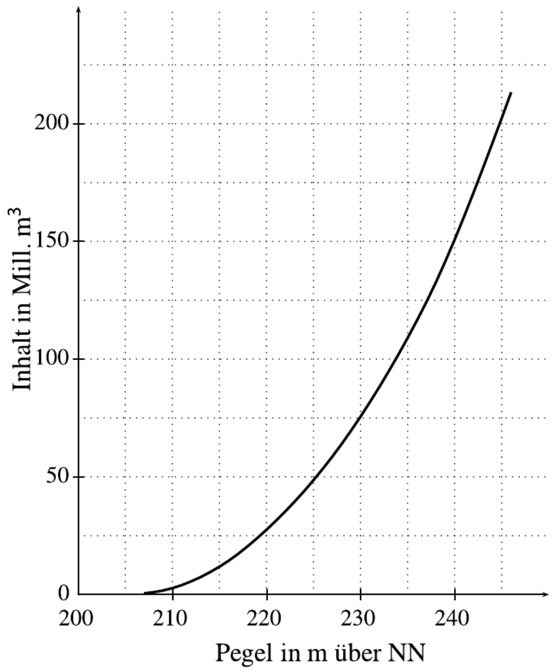
Aufgabe LA3 (3 Punkte). Arbeiten Sie das sage-Tutorial auf `www.mathematik.uni-marburg.de/~weich/Analysis2/Blaetter.html` bis zu Aufgabe 2 durch und bearbeiten Sie diese.

Aufgabe LA4 (5 Punkte). Wir behandeln hier eine Aufgabe aus [1]:

"Wieviel Wasser hat der Edersee am 15. August 2003 verloren?"

Den Schülern werden zur Lösung der Aufgabe die folgenden zwei Diagramme vorgelegt, die den Inhalt des Edersees ahängig vom Pegel bzw den Pegel abhängig von der Zeit darstellen.





Lösen Sie die Aufgabe, d.h. bestimmen Sie einen Näherungswert für die gesuchte Wassermenge.

In der Didaktik werden folgende Grundvorstellungen der Ableitung diskutiert:

- Tangentensteigung
- lokale Änderungsrate
- lineare Approximation

Recherchieren Sie die Begriffe (z.B. im Internet oder weiterführender Literatur, die diese Begriffe auch kritisch diskutiert). Welche dieser Grundvorstellungen können beim Lösen dieser Aufgabe als Ziel des Unterrichts anvisiert werden? Welche Beziehungen haben die Grundvorstellungen dabei zueinander? Wieso veranschaulicht diese Aufgabe die Kettenregel?

Hinweis: Die angegebenen (sowie die aktuellen) Daten können Sie unter `www.edersee.de/wasserstand` abrufen.

Literatur

[1] F. Gerber. Wassrestand im Edersee. *mathematik lehren*, 132(63), 2005.