Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Tobias Weich

Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Analysis 2
– Blatt 3 –
Abgabe Freitag, 11.11.2011 nach der Vorlesung

Aufgabe 65 (4 Punkte). Sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ definiert durch $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

a) Zeigen Sie, dass für die Taylorreihe im Punkt Null gilt

$$T(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

wobei die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten gegeben sind durch

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe.

c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe auf ganz $(-1, 1)$ gegen f konvergiert.

d) Berechnen Sie anhand der hergeleiteten Formel das Taylorpolynom 4.Ordung der Funktion

$$E(v) = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right]$$

im Punkt $v = 0$ (Es gilt $|v| < c$). Lassen Sie sich im Tutorium von den Physikern erklären, wieso diese Entwicklung so wichtig für unser tägliches Leben ist.

Aufgabe 66 (4 Punkte). Man prüfe anhand der Definition, ob die folgenden Mengen Jordan-messbar sind und berechne gegebenenfalls das Volumen.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, 1], 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $A = [0, 1]^{n-1} \times \{0\} \ \subset \mathbb{R}^n$

b) $A = ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^{n-1} \times \{0\} \ \subset \mathbb{R}^n$

***Aufgabe 67** (5 Punkte).

a) Die Cantormenge ist wie folgt definiert:

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \text{ mit } C_n := \bigcup_{a=(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,2\}^n} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i 3^{-i}, \sum_{i=1}^{n} a_i 3^{-i} + \frac{1}{3^n} \right]$$

Verschaffen Sie sich anhand einer Skizze eine Vorstellung wie die Menge aussieht, zeigen Sie, dass sie Jordan-messbar ist und berechnen Sie das Volumen

b) Die “Boxcounting-Dimension” einer Untermenge eines n-dimensionalen Würfels $A \subset [0,1]^n$ kann wie folgt definiert werden: Für $k \in \mathbb{N}$ betrachtet man die Zerlegung in k^n gleich große Würfel $P_k := (\{0, \frac{1}{k}, \ldots, 1\}, \ldots, \{0, \frac{1}{k}, \ldots, 1\})$. Sei N_k die Anzahl der Würfel W_α dieser Zerlegung mit $W_\alpha \cap A \neq \emptyset$, dann ist die Boxcounting-Dimension definiert als

$$d_{BC}(A) := \lim_{k \to \infty} \frac{\log N_k}{\log k} \tag{1}$$

Zeigen Sie: Ist $A \subset [0,1]^n$ abgeschlossen und $d_{BC}(A) < n$ dann ist A eine Jordan-Nullmenge.

***Aufgabe 68** (3 Punkte). Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und zusammenhängend, $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann gilt:

$$C \cap \bar{A} \neq \emptyset \text{ und } C \not\subseteq \mathrm{Int}A \Leftrightarrow C \cap \partial A \neq \emptyset$$

Aufgabe LA5 (4 Punkte). Arbeiten Sie das *aktuelle* Sage-Tutorial auf `www.mathematik.uni-marburg.de/~weich/Analysis2/Blaetter.html` bis zu Aufgabe 3 durch und bearbeiten Sie diese.

Aufgabe LA6 (4 Punkte). Nehmen wir an, eine Lehrkraft gibt im Analysis Unterricht die folgende Definition vor: “Die Ableitung der Funktion $x \to x^n$ ist definiert als $x \to n \cdot x^{n-1}$.” (Wir setzen voraus, dass der Ableitungsbegriff vorher nicht behandelt wurde.)

Beantworten Sie hierzu die folgenden Fragen:

a) Welchen Zweck erfüllen Definitionen beim Aufbau einer mathematischen Theorie? (Antworten Sie unabhängig von der obigen Situation.)

b) Welche Qualitätsmerkmale kann eine Definition haben? (ebenfalls unabhängig von der Situation)

c) Ist die angegebene Definition formal zulässig in dem Sinne, dass sie widerspruchsfrei ist?

d) Welche Grundvorstellen des Begriffs Ableitung wird durch diese Definition transportiert? Vergleichen Sie mit den in der Vorlesung behandelten Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff. Recherchieren Sie die Bedeutung des Begriffspaars Syntax/Semantik und beziehen Sie diese Begriffe in Ihre Antwort ein.

e) Würde man in einem adäquaten Analysis-Unterricht den Ableitungsbegriff so formulieren?

f) Beantworten Sie die zu c) d) und e) analogen Fragen auch für den folgenden Definitionsversuch aus dem Algebra Unterricht: “Eine natürliche Zahl n heißt durch 3 teilbar, falls ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.”